

MODELLIERUNG UND ANALYSE VON ONDULATIONEN IN UNIDIREKTIONAL VERSTÄRKTEN FASERKUNSTSTOFFVERBUNDEN

T. Blümel¹, A. Krimmer², S. Thomas¹, A. Bardenhagen¹

¹ Institut für Luft- und Raumfahrt, TU Berlin, 10587 Berlin, Germany

² TPI Composites Germany GmbH, 13088 Berlin, Germany

Zusammenfassung

In diesem Paper wird ein neues analytisch-stochastisches Materialmodell für unidirektional verstärkte Faserkunststoffverbunde (FKV) vorgestellt. Dieses Modell beschreibt Faserondulationen mithilfe von stochastischen Verteilungsfunktionen (Faserorientierungsverteilungen) und ermöglicht somit die Untersuchung der Einflüsse von Ondulationen auf die mechanischen Eigenschaften des FKV.

Zur Beschreibung der Ondulationen in der Einzelschichtebene (*in-plane*) sowie in Dickenrichtung (*out-of-plane*) wird eine bivariate Normalverteilungsfunktion verwendet. Damit lassen sich alle Elastizitätseigenschaften der ondulierten Einzelschicht berechnen und die richtungsabhängigen Einflüsse der Faserfehlerorientierungen abbilden und analysieren. Aufbauend auf dieser Modellierung wird eine Methodik zur Festigkeitsanalyse beschrieben und verschiedene Versagensmechanismen bei Zug- und Druckbeanspruchung in Faserrichtung betrachtet und diskutiert. Dieses Modell liefert allein anhand der Komponenteneigenschaften von Glasfaser und Epoxid-Matrix realistische Festigkeits- und Elastizitätskennwerte für den Verbund.

Abschließend wird ein Ausblick auf die geplante Modellvalidierung gegeben. Dazu sollen normgerechte Materialprüfungen an Couponproben durchgeführt werden. Die Faserorientierungsverteilungen dieser Proben sollen mittels Mikro-Röntgencomputertomografie (μ CT) ermittelt werden. Dieses Vorgehen ermöglicht den direkten Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den individuellen Vorhersagen des Modells unter Berücksichtigung der inneren Struktur der jeweiligen Probe.

Nomenklatur

Symbole

α	Designfaserorientierung	°
β	Lokale Faserfehlerorientierung	°
ε	Dehnung	-
φ	Faservolumengehalt	-
σ	Spannung	N/mm ²
ν	Querkontraktionszahl	-
e	Anstrengung	-
E	Elastizitätsmodul	N/mm ²
G	Schubmodul	N/mm ²
p	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	-
P	Kumulierte Wahrscheinlichkeit	-
R	Festigkeit	N/mm ²
s	Standardabweichung	°
$[Q]$	Steifigkeitsmatrix	N/mm ²
$[S]$	Nachgiebigkeitsmatrix	mm ² /N
$[T]$	Transformationsmatrix	-

Tiefgestellte Indizes

\parallel, \perp, \perp	Faser-Koordinatensystem
\parallel	in Faserrichtung
\perp	quer zur Faserrichtung
1,2,3	Koordinatensystem der Einzelschicht
12	in der Einzelschichtebene (<i>in-plane</i>)
13	in Dickenrichtung der ES (<i>out-of-plane</i>)
x, y, z	Koordinatensystem des MSV
F	Fasereigenschaft
M	Matraxeigenschaft

Abkürzungen

μ CT	Mikro Röntgencomputertomografie
μ K	Mikroknicken
CF	Carbonfaser
ES	Einzelschicht
FB	Faserbruch
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
FVG	Faservolumengehalt
GF	Glasfaser
KLT	Klassische Laminattheorie
KOS	Koordinatensystem
MB	Matrixbruch
MSV	Mehrschichtverbund
Prepreg	Preimpregnated (vorimprägniert)
RTM	Resin Transfer Moulding
RVE	Repräsentatives Volumenelement
SK	Schubknicken
UD	unidirektional (-verstärkt)
VaRIM	Vacuum assisted Resin Injection Moulding
ZFB	Zwischenfaserbruch

Hochgestellte Indizes

,	Unter Berücksichtigung der Querkontraktionsbehinderung
-	Eigenschaft ohne Ondulationseinfluss
~	Ondulierte Eigenschaft
(+)	Zug
(-)	Druck

1. EINLEITUNG UND MOTIVATION

Die Materialeigenschaften von Faserkunststoffverbunden (FKV) werden üblicherweise in mechanischen Prüfungen mit großem Stichprobenumfang ermittelt. Dabei werden meist unter Laborbedingungen Prüfkörper hergestellt und ebenfalls unter Laborbedingungen getestet. Diese Materialtests bilden somit nicht die Qualitätsschwankungen innerhalb realer Bauteile oder Produktionsserien ab.

Dennoch wird meist großer Aufwand betrieben, um Materialkennwerte von FKV experimentell zu ermitteln. Nach dem Building Block Approach (siehe Bild 1) werden Verbundstrukturen von der Materialebene über Einzelkomponenten bis hin zum Großversuch am gesamten Bauteil geprüft, um den Nachweis der strukturellen Integrität zu erbringen. Dabei bilden die Materialprüfungen die Grundlage für die Auslegung aller Strukturelemente und haben somit den zahlenmäßig größten Testumfang innerhalb der Strukturzertifizierung.



Bild 1: Mechanische Prüfung von Verbundstrukturen nach dem *Building Block Approach*

Neben der mechanischen Prüfung besteht die Möglichkeit Materialkennwerte von FKV mithilfe von Materialmodellen rechnerisch zu bestimmen. Die Berechnung bietet ein erhebliches Potenzial der Zeit- und Kosteneinsparung gegenüber der experimentellen Kennwertermittlung. Außerdem können einflussnehmende Faktoren wie der Faservolumengehalt (FVG), Faserorientierungen sowie die Faser-Matrix-Kombination parametrisch untersucht und optimiert werden.

Insbesondere Festigkeiten werden dennoch bevorzugt experimentell bestimmt. Die experimentell ermittelten Kennwerte einer FKV-Probenserie besitzen in der Realität eine statistische Streuung und vor allem für Festigkeiten werden statistisch abgesicherte Werte zur Auslegung benötigt. Die bestehenden Materialmodelle sind derzeit nicht in der Lage solche statistischen Effekte abzubilden. Ein stochastisch basiertes Materialmodell hätte das Potenzial diese Lücke zu schließen.

Um den Prüfaufwand zur Charakterisierung der FKV zu reduzieren, werden demnach verbesserte Materialmodelle benötigt. Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Modells zur Berechnung von Materialkennwerten unter Berücksichtigung von Schwankungen in der Material- und Fertigungsqualität. Damit solche statistischen Effekte bei gleichzeitig möglichst geringem Rechenaufwand abgebildet werden können, wird ein analytisch-stochastischer Modellierungsansatz gewählt.

2. GRUNDLAGEN UND STAND DER TECHNIK

In diesem Abschnitt werden der Stand der Technik bei der Analyse von faserverstärkten Schichtverbunden dargestellt und die Grundlagen zum Aufbau des angestrebten Modells gelegt. Dabei werden die für die Mikromechanik verwendeten Mischungsregeln dargestellt und die Berechnung von Mehrschichtverbunden (MSV) mithilfe der klassischen Laminattheorie (KLT) zusammengefasst. Zuletzt werden Modelle vorgestellt, die es ermöglichen Ondulationen zu berücksichtigen.

2.1. Elastizitäten der Einzelschicht

Die elastischen Eigenschaften einer Einzelschicht (ES) des FKV ergeben sich aus den mechanischen Eigenschaften der Einzelkomponenten: Faser und Matrix. Hierfür werden Mischungsregeln verwendet, die die Eigenschaften von Faser und Matrix in Abhängigkeit vom Faservolumengehalt φ verschmieren. Durch diese makroskopische Betrachtung wird die mikroskopisch heterogene Struktur zu einem quasi-homogenen Kontinuum mit transversal-isotropen Eigenschaften überführt.

Mit der Zeit wurden, aus der Motivation bestimmte Effekte genauer abbilden zu können, eine Vielzahl an Mischungsregeln entwickelt. Die Wahl der Mischungsregel beeinflusst die berechneten Steifigkeitsgrößen. Etabliert haben sich u.a. die Mischungsregeln nach HASHIN und ROSEN [1], die auch in der VDI 2014 [2] verwendet werden, sowie die Mischungsregel nach PUCK [3]. Die Mischungsregel nach KRIMMER [4] ermöglicht es, die Querkontraktionsbehinderung der Matrix durch die steifere Faser in Abhängigkeit des FVG explizit abzubilden. Daraus ergeben sich in-situ-Eigenschaften der Matrix. Diese Mischungsregeln basieren stets auf einem mikromechanischen Modell. Dabei wird meist ein repräsentatives Element aus Faser und Matrix betrachtet, anhand dessen die verschmierten Steifigkeiten abgeleitet werden. Bild 2 zeigt beispielhaft das zugrundeliegende mikromechanische Modell zur Herleitung des Elastizitätsmodul quer zur Faserrichtung aus [4]. Hier ist zu erkennen, dass alle Fasern als gleichmäßig verteilt und parallel angeordnet angenommen werden. Demzufolge ergeben sich aus der mikromechanischen Modellierung transversalisotrope Eigenschaften. Faserkrümmungen bzw. Ondulationen können auf dieser Betrachtungsebene nicht abgebildet werden.

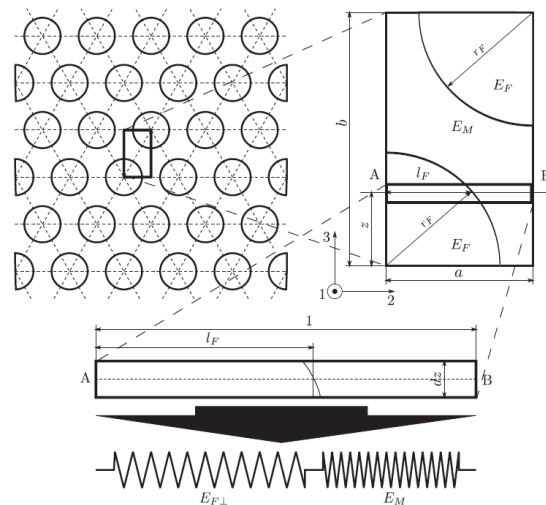


Bild 2: Repräsentatives Volumenelement zur Herleitung von E_{\perp} nach Krimmer [4]

2.2. Steifigkeiten des MSV

Da die Eigenschaften einer unidirektionalen (UD) Einzelschicht stark orthotrop sind, werden üblicherweise unterschiedlich orientierte ES in einem FKV-Laminat kombiniert, um seine Eigenschaften auf die Ansprüche an die Struktur abzustimmen. Eine ingenieurmäßige Standardmethode zur Berechnung solcher mehrschichtigen FKV-Laminat ist die klassische Laminattheorie (KLT). Mithilfe der KLT werden Beanspruchungen und Verformungen des MSV sowie der Einzelschichten bestimmt.

Dabei wird die inhomogene ES eines Verbundes als homogenisiertes orthotropes Kontinuum betrachtet. Das Funktionsprinzip der KLT ist in Bild 3 schematisch dargestellt. Zunächst werden die mechanischen Eigenschaften der Einzelkomponenten Faser und Matrix mithilfe von Mischungsregeln zu einem orthotropen Kontinuum verschmiert. Anschließend werden die unidirektionalen Einzelschichten entsprechend ihrer Orientierung und Schichtung zu einem Mehrschichtverbund kombiniert.

Demnach besitzt die KLT zwei Betrachtungsebenen: die Mikromechanik und die Makromechanik. Diese Theorie modelliert alle Fasern in der ES als parallel angeordnet, ideal gestreckt und gleichmäßig verteilt. Die Berücksichtigung von Welligkeiten der Fasern und Abweichungen von der idealen Faserorientierung ist in diesen beiden Ebenen nicht möglich.

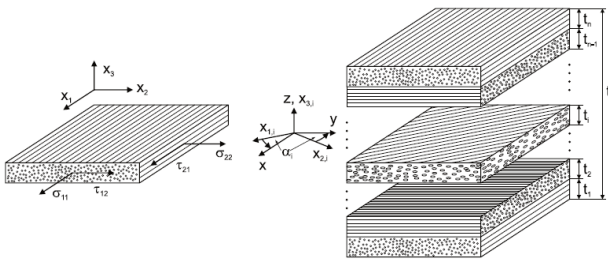


Bild 3: Die unidirektionale ES und Aufbau eines Mehrschichtverbunds mit der KLT gemäß [5]

2.3. Faserondulation

Unter Ondulation werden lokale Abweichungen der Faserorientierungen von der Designfaserrichtung verstanden. Globale Faserfehlerorientierungen kommen bspw. durch Fehlalage von Gewebe- oder Gelegesichten zustande. Im Gegensatz dazu sind lokale Fehlerorientierungen nicht unbedingt auf Fertigungsfehler zurückzuführen, sondern oft systembedingt vorhanden. Durch das Weben und Flechten von Faserbündeln zu textilen Halbzeugen werden gezielt Welligkeiten in die Fasern eingebracht. Auch bei Fasergelegen entstehen Welligkeiten durch das Schichten von Einzellagen mit unterschiedlicher Orientierung. Selbst im Inneren eines einzelnen Rovings sind kleine Orientierungsunterschiede der Einzelfilamente vorhanden.

Wie zuvor gezeigt wurde, können die Einflüsse von Faser-Ondulationen mithilfe der KLT und mikromechanischer Mischungsregeln nicht abgebildet werden. Gewebe und geflochtene Faserhalbzeuge besitzen aufgrund ihrer textilen Struktur systembedingt starke Ondulationen. Um diese textilen Strukturen abzubilden, wurden erweiterte Modelle entwickelt. CAMANHO, DAVILA, PINHO et Al. [6] stellen beispielsweise einen multiskalaren Modellierungsansatz mit drei Betrachtungsebenen vor. Hierbei werden auf der mikroskalaren Ebene Faser und Matrix abgebildet, auf der

mesoskalaren Ebene werden die textilen Strukturen einer faserverstärkten ES abgebildet und auf der makroskalaren Ebene werden diese Schichten zu einem Laminat zusammengesetzt. Demnach ist die mesoskalare Ebene geeignet, um Ondulationen zu modellieren und zu analysieren. Die Modellierung von Geweben und Geflechtern basiert dabei meist auf der Betrachtung eines repräsentativen Volumenelements (RVE), aus dem sich durch Duplizierung, Spiegelung und Rotation die gesamte Schicht erzeugen lässt. BARBERO stellt in [7] analytische Formulierungen der gängigen Gewebearbeiten zur Verfügung. Oft werden diese RVEs auch mithilfe von Finite-Elemente-Methoden simuliert. METZNER et Al. haben in [8] ebenfalls mithilfe von analytisch modellierten RVEs Parameterstudien an unidirektional geflochtenem CFK durchgeführt. Bild 4 zeigt eins der in dieser Arbeit verwendeten RVE einer geflochtenen CFK-Struktur.

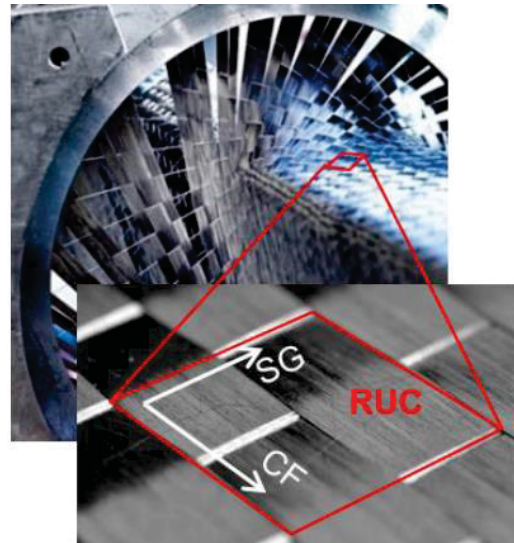


Bild 4: Einheitszelle (RUC) einer geflochtenen CFK-Struktur aus [8]

Im Gegensatz zu den mit Endlosfasern verstärkten FKV besitzen kurzfaserverstärkte Verbunde keine sich wiederholende textile Struktur, sondern vielmehr eine stochastische Verteilung von Kurzfasern in der Matrix. Folglich werden zur Modellierung dieser FKV-Klasse üblicherweise stochastische Funktionen verwendet. TRAPPE et Al. beschreiben in [9] die an mit Kurzglasfasern verstärkten Thermoplasten gemessenen Faserorientierungen mithilfe einer elliptischen Verteilungsfunktion.

Bei unidirektional endlosfaserverstärkten FKV ist diese mesoskalare Betrachtungsebene dennoch unüblich. YURGARTIS [10] hat bei der Entwicklung einer Methode zur Messung von Faserorientierungen festgestellt, dass die Faserorientierungen in UD Einzelschichten in guter Näherung einer Gaußschen Normalverteilung folgen. In der Arbeit von Thomas [11] wurden Faserorientierungsverteilungen in CF-Prepreg-Verbunden mithilfe von Schlibbildern bestimmt. Auch hier zeigten sich sowohl in der Schichtebene (*in-plane*) als auch in Dickenrichtung (*out-of-plane*) gute Übereinstimmungen mit Gaußschen Normalverteilungen. Auf Basis dieser Erkenntnisse erscheint es sinnvoll, die Faserondulationen in UD-FKV mithilfe von stochastischen Funktionen zu beschreiben, um die mechanischen Kennwerte in Abhängigkeit der *in-plane* und *out-of-plane* Ondulationen zu berechnen.

3. ANALYTISCHE MODELLBILDUNG

In diesem Abschnitt wird ein stochastisch-physikalisch basiertes Materialmodell zur Berechnung der mechanischen Kennwerte von unidirektional verstärkten FKV-Einzelschichten in Abhängigkeit der Faserorientierungsverteilungen entwickelt. Zunächst wird der multiskalare Modellaufbau beschrieben. Zur Modellierung und differenzierten Analyse der *in-plane* und *out-of-plane* Ondulationen wird die Faserorientierungsverteilung innerhalb der ES durch eine bivariate Normalverteilung beschrieben. Anschließend werden die daraus resultierenden Elastizitätseigenschaften hergeleitet und diskutiert.

3.1. Multiskalarer Modellaufbau

Wie im Abschnitt 2.2 diskutiert, ist im Gegensatz zur KLT eine zusätzliche Betrachtungsebene nötig, um Faserondulationen abzubilden. Daher wird für das hier vorgestellte Materialmodell ein multiskalarer Modellaufbau mit drei Betrachtungsebenen gewählt. Bild 5 stellt diesen multiskalaren Modellaufbau schematisch dar und ordnet den einzelnen Modellebenen jeweils ein Koordinatensystem (KOS) zu.

In der mikroskalaren Ebene werden die Faser- und Matrixeigenschaften mithilfe von Mischungsregeln verschmiert. Dabei ist lediglich ein RVE mit einer Einzelfaser und der umgebenden Matrix mikromechanisch zu betrachten. In dieser Ebene wird das Faser-KOS mit den Achsen Faserparallel \parallel und senkrecht zur Faser \perp verwendet. Da die Faser als rotationssymmetrisch angesehen wird, ist keine Unterscheidung der \perp -Richtungen in der Ebene und in Dickenrichtung nötig.

Die mesoskalare Ebene dient der Modellierung von Ondulationen innerhalb der unidirektionalen Einzelschicht. Wie einleitend erwähnt, wird in dieser Ebene von einer stochastischen Verteilung der Faserorientierungen ausgegangen. Dabei stellt die 1-Richtung den Mittelwert der Faserorientierungen dar und die 2-Achse liegt senkrecht dazu in der ES-Ebene. Durch die 3-Achse in Dickenrichtung der ES spannt sich schließlich ein kartesisches KOS auf.

In der makroskalaren Ebene können abschließend die ondulationsbehafteten Einzelschichten analog zur KLT geschichtet und so zu einem Mehrschichtverbund zusammengesetzt werden.

3.2. Mikromechanische Modellierung

Die mikroskalare Ebene ist die kleinste Betrachtungsebene des hier vorgestellten Materialmodells. Auf dieser Ebene werden mikromechanische Mischungsregeln verwendet, um Elastizitäten und Festigkeiten eines Faser-Matrix-Verbunds zu berechnen. Mischungsregeln sind als Übertragungsfunktionen zu verstehen, mit deren Hilfe sich die Eigenschaften der Einzelkomponenten eines mehrphasigen Gemischs in verschmierte Eigenschaften überführen lassen. Der wesentliche Parameter ist dabei der FVG.

Auf der mikroskopischen Ebene des vorgestellten Modells wird die mikromechanische Modellierung nach KRIMMER [4] verwendet. Diese mikromechanische Modellierung bietet vollständig phänomenologisch basierte, analytische Mischungsregeln für Moduln und Festigkeiten. Ein wesentlicher Aspekt von KRIMMERS Modell ist die Möglichkeit der analytischen Berechnung der in-situ-Eigenschaften der Polymermatrix. Als in-situ-Eigenschaften der Matrix werden dabei jene mechanischen Eigenschaften bezeichnet, die

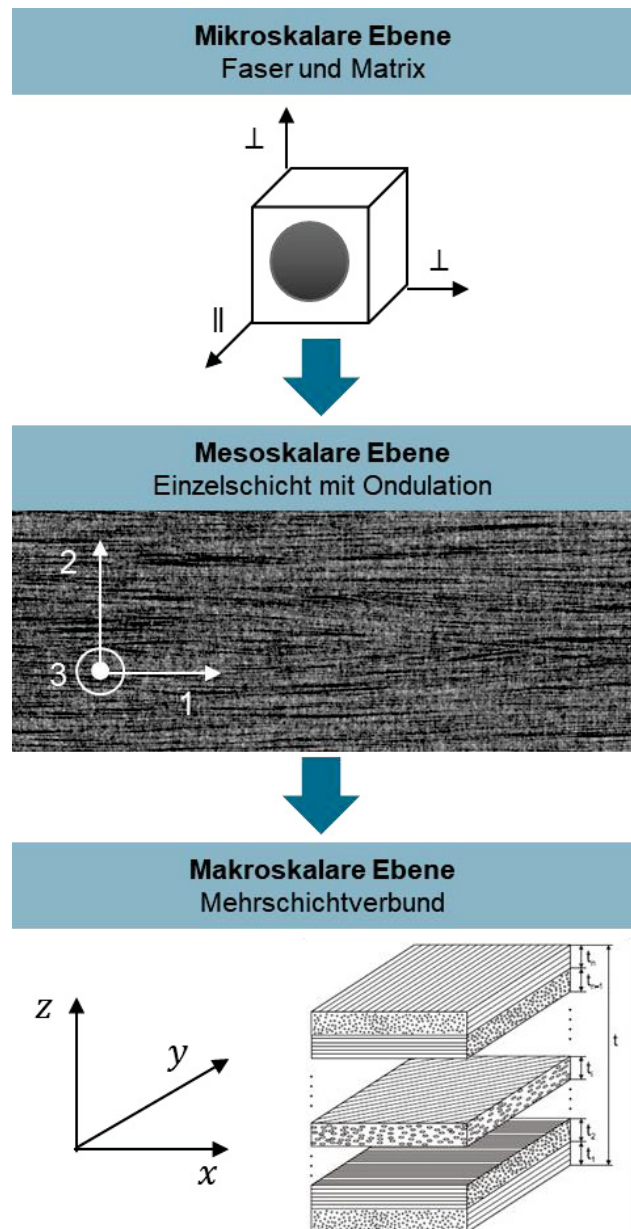


Bild 5: Multiskalarer Modellaufbau des vorgestellten Materialmodells in drei Ebenen mit zugehörigen KOS

am reinen Polymer nicht messbar sind und infolge der Querkontraktionsbehinderung der polymeren Matrix durch die in sie eingebetteten Fasern entstehen.

Bezüglich der Erläuterung und Herleitung dieser Mischungsregeln sei an dieser Stelle auf [4] verwiesen. Im Folgenden sind die mikromechanischen Mischungsregeln nach KRIMMER für die Moduln und Festigkeiten unter Berücksichtigung der Querkontraktionsbehinderung für eine hexagonale Faseranordnung zusammengefasst. Dabei sind alle Größen, bei denen die Querkontraktionsbehinderung berücksichtigt ist, mit einem Hochkomma (') gekennzeichnet.

Mikromechanische Elastizitäten

Elastizitätsmodul in Faserrichtung:

$$(1) E'_{\parallel} = \tilde{E}'_{F\parallel} \cdot \varphi + E'_{M\parallel} (1 - \varphi) \quad \text{mit} \quad \tilde{E}'_{F\parallel} = f_u \cdot E_{F\parallel}$$

Elastizitätsmodul quer zur Faserrichtung:

$$(2) \quad E'_{\perp} = \frac{2E'_{M\perp}}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}} - \frac{\pi}{2\left(1-\frac{E'_{M\perp}}{E'_{F\perp}}\right)} + \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}\left(1-\frac{E'_{M\perp}}{E'_{F\perp}}\right)}{1-2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}\left(1-\frac{E'_{M\perp}}{E'_{F\perp}}\right)}\right)}{\left(1-\frac{E'_{M\perp}}{E'_{F\perp}}\right)\sqrt{1-2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}\left(1-\frac{E'_{M\perp}}{E'_{F\perp}}\right)}} \right]$$

Schubmoduln:

$$(3) \quad G'_{\perp\parallel} = \frac{2G'_{M\parallel\perp}}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}} - \frac{\pi}{2\left(1-\frac{G'_{M\parallel\perp}}{G'_{F\parallel\perp}}\right)} + \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}\left(1-\frac{G'_{M\parallel\perp}}{G'_{F\parallel\perp}}\right)}{1-2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}\left(1-\frac{G'_{M\parallel\perp}}{G'_{F\parallel\perp}}\right)}\right)}{\left(1-\frac{G'_{M\parallel\perp}}{G'_{F\parallel\perp}}\right)\sqrt{1-2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}\left(1-\frac{G'_{M\parallel\perp}}{G'_{F\parallel\perp}}\right)}} \right]$$

$$(4) \quad G'_{\perp\perp} = \frac{2G'_{M\perp\perp}}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}} - \frac{\pi}{2\left(1-\frac{G'_{M\perp\perp}}{G'_{F\perp\perp}}\right)} + \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}\left(1-\frac{G'_{M\perp\perp}}{G'_{F\perp\perp}}\right)}{1-2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}\left(1-\frac{G'_{M\perp\perp}}{G'_{F\perp\perp}}\right)}\right)}{\left(1-\frac{G'_{M\perp\perp}}{G'_{F\perp\perp}}\right)\sqrt{1-2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}\left(1-\frac{G'_{M\perp\perp}}{G'_{F\perp\perp}}\right)}} \right]$$

Querkontraktionszahlen:

$$(5) \quad \nu_{\perp\parallel} = \varphi \nu_{F\parallel} + (1-\varphi)\nu_M$$

$$(6) \quad \nu_{\perp\perp} = \frac{E'_{\perp}}{2G'_{\perp\perp}} - 1$$

Hierbei stellen die Werte $E'_{M\parallel}$, $E'_{M\perp}$, $G'_{M\parallel\perp}$ und $G'_{M\perp\perp}$ die in-situ Eigenschaften der Matrix dar. Deren Berechnung ist in [12] zu finden. Das mikromechanische Modell von KRIMMER beinhaltet zudem die Möglichkeit Ondulationen auf vereinfachte Weise zu berücksichtigen. Dazu wird der Faser-

längsmodul mithilfe eines Ondulationsfaktors f_u wie folgt abgemindert.

$$(7) \quad \tilde{E}_{F\parallel} = f_u \cdot E_{F\parallel}$$

Dieser Faktor wirkt sich auf den E-Modul E'_{\parallel} in Faserrichtung sowie die Querkontraktionszahl $\nu_{\perp\parallel}$ aus. Allerdings ist der Ondulationsfaktor nicht physikalisch begründet, da durch Ondulation nicht die eigentliche Steifigkeit der Faser, sondern lediglich deren Orientierung beeinflusst wird. Er stellt vielmehr einen Erfahrungswert dar, der sich durch rückwärtiges Rechnen aus experimentellen Kennwerten bestimmen lässt. Da in diesem Modell Ondulationen nicht in der Mikromechanik, sondern erst in der übergeordneten Betrachtungsebene abgebildet werden sollen, wird hier mit $f_u = 1$ gerechnet.

Mikromechanische Festigkeiten

Im Folgenden sind auch die ebenfalls vollständig analytisch basierten Mischungsregeln für die mikromechanischen Festigkeiten aus [4] zusammengefasst.

Festigkeiten in Faserrichtung:

$$(8) \quad R_{\parallel}^+ = R_{F\parallel}^+ \left(\varphi + (1-\varphi) \frac{E'_{M\parallel}}{E'_{F\parallel}} \right)$$

$$(9) \quad R_{\parallel}^- = R_{F\parallel}^- \left(\varphi + (1-\varphi) \frac{E'_{M\parallel}}{E'_{F\parallel}} \right)$$

Festigkeiten quer zur Faserrichtung:

$$(10) \quad R_{\perp}^+ = R_M^+ E'_{\perp} \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}}{E'_{F\perp}} + \frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}}{E'_{M\perp}} \right)$$

$$(11) \quad R_{\perp}^- = R_M^- E'_{\perp} \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}}{E'_{F\perp}} + \frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}}{E'_{M\perp}} \right)$$

Schubfestigkeit quer-längs zur Faserrichtung:

$$(12) \quad R_{\perp\parallel} = R_{M\perp\parallel} G'_{\perp\parallel} \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}}{G'_{F\perp\parallel}} + \frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}\frac{\varphi}{\pi}}}{G'_{M\perp\parallel}} \right)$$

Mit den so bestimmten Elastizitäten und Festigkeiten ist das mikromechanische Modell vollständig charakterisiert. Die elastischen Eigenschaften des mikroskopischen Faser-Matrix-Elements werden in der Nachgiebigkeitsmatrix dargestellt. [13]

$$(13) \quad [\bar{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\parallel}} & -\frac{\nu_{\parallel\perp}}{E_{\parallel}} & -\frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{1}{E_{\perp}} & -\frac{\nu_{\perp\perp}}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & -\frac{\nu_{\perp\perp}}{E_{\perp}} & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\perp}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\perp}} \end{bmatrix}$$

Die Inverse der Nachgiebigkeitsmatrix stellt die Steifigkeitsmatrix dar.

$$(14) \quad [\bar{Q}] = [\bar{S}]^{-1}$$

Dabei kennzeichnet der gerade Strich über der Matrix, dass dieser Wert aus der reinen Mikromechanik stammt – Ondulation ist also nicht berücksichtigt. Ondulations-behaftete Werte werden im Folgenden mit einer Tilde (\sim) gekennzeichnet.

3.3. Modellierung der Ondulation

In diesem Abschnitt wird die Modellierung der Faserondulationen in der mesoskalaren Modellebene beschrieben. Zunächst wird das Stoffgesetz der ondulierten ES hergeleitet. Anschließend wird die Verwendung stochastischer Funktionen zur Darstellung der Faserorientierungsverteilung erläutert.

Herleitung des mesomechanischen Modells

Aus den unter Absatz 2.3 genannten Gründen wird im Rahmen dieses Modells eine stochastische Verteilung der Faserorientierungen angenommen. Die Hauptverstärkungsrichtung der ES bzgl. des globalen KOS wird mit α bezeichnet. Lokal weichen die Orientierungen der Einzelfilamente jedoch um den Winkel β von dieser Designorientierung ab. Die Streuung dieser lokalen Faserorientierungen wird zunächst allgemein mit der Faserorientierungsverteilung $p(\beta)$ beschrieben. Für die Herleitung des Stoffgesetzes der ondulierten ES kann $p(\beta)$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sein. So erhält man ein für beliebige Faserorientierungsverteilungen allgemein gültiges Stoffgesetz.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine ondulationsbehaftete ES, wie sie in der abgebildeten μ CT-Aufnahme (Bild 6) zu sehen ist. Im Folgenden wird ein repräsentatives Volumenelement (RVE) einer solchen Einzelschicht mit stochastisch verteilten Faserorientierungen betrachtet. Dieses RVE kann nun in infinitesimal kleine Teile unterteilt werden. Grundlegend wird im Folgenden davon ausgegangen, dass sich die mikroskopisch stark heterogene Struktur makroskopisch homogen verhält. Dieses homogene Verhalten wird mithilfe der folgenden Dehnungskompatibilität innerhalb des RVE dargestellt.

$$(15) \quad \{\tilde{\varepsilon}\}_{ES} = \{\varepsilon\}_i$$

D.h. die Dehnungen in jedem Element $\{\varepsilon\}_i$ entsprechen der globalen Dehnung in der ondulierten ES $\{\tilde{\varepsilon}\}_{ES}$. Dies entspricht einer Parallelschaltung der Steifigkeiten der einzelnen infinitesimalen Elemente. Die Betrachtung des Kräftegleichgewichts an einem solchen repräsentativen Volumenelement führt zur Definition der Steifigkeitsmatrix der ondulierten ES:

$$(16) \quad [\tilde{Q}]_{ES} = \int [\bar{Q}(\beta)] \cdot p(\beta) d\beta$$

Dabei ist $[\bar{Q}(\beta)]$ die mikromechanische Steifigkeitsmatrix im KOS der ES, also die um den lokalen Faserwinkel β polartransformierte Steifigkeitsmatrix. Die vollständige Transformationsbeziehung für beide Ondulationsrichtungen ist in Formel (18) dargestellt.

Faserorientierungsverteilung

Neben der Mikromechanik wird zur Berechnung der ondulierten Steifigkeiten mit Formel (16) nun eine geeignete Faserorientierungsverteilung $p(\beta)$ benötigt. Wie zuvor erläutert, eignen sich Gaußsche Normalverteilungen zur Abbildung der Faserorientierungsverteilungen in unidirektionalen Einzelschichten. Da die Fasern nicht nur in der Schichtebene, sondern auch in Dickenrichtung ondulieren, sind beide Ondulationsrichtungen im Modell zu berücksichtigen. Um die Ondulationen in beiden Ebenen abbilden und getrennt voneinander untersuchen zu können, wird eine bivariate Normalverteilung verwendet:

$$(17) \quad p(\beta_{12}, \beta_{13}) = \frac{1}{2\pi \cdot s_{12} \cdot s_{13}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{12}^2}{s_{12}^2} + \frac{\beta_{13}^2}{s_{13}^2} \right)\right)$$

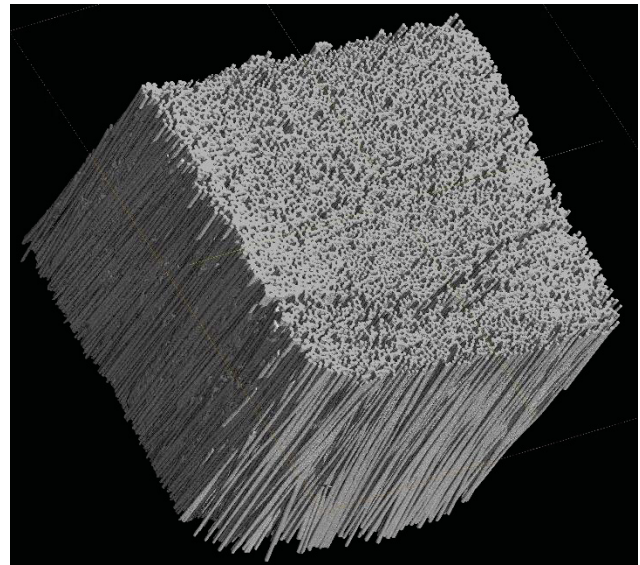


Bild 6: μ CT-Aufnahme einer $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$ GFK-Probe

Dabei sind β_{12} die in-plane Faserorientierung, also der Faserwinkel in der Schichtebene (1-2-Ebene), und β_{13} die out-of-plane Faserorientierung, also der Faserwinkel in Dickenrichtung (Fehlorientierung in der 1-3-Ebene). Die Werte s_{12} und s_{13} stehen für die Standardabweichungen der Faserorientierungen in den jeweiligen Ebenen. Bild 7 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der *in-plane* und *out-of-plane* Faserorientierungen für den Fall einer bivariaten Normalverteilung mit einer größeren Winkelstreuung in der Schichtebene als in Dickenrichtung. Diese Modellierung ermöglicht somit die Analyse unterschiedlicher Ondulationen in der Schichtebene sowie senkrecht dazu. Da FKV-Bauteile in der Regel bei der Herstellung normal zu ihren Schichtebenen kompaktiert werden (bspw. beim VaRIM oder RTM Verfahren) ist bei unidirektionalen ES von einer verringerten Ondulation in Dickenrichtung auszugehen. Im Gegensatz dazu weisen Fasergewebe hauptsächlich Ondulationen in Dickenrichtung auf, da beim Weben der Faserhalbzuge die einzelnen Faserbündel abwechselnd über- und untereinander angeordnet werden. Solche unterschiedlichen Ondulationsverhältnisse können mithilfe der bivariaten Normalverteilung abgebildet werden.

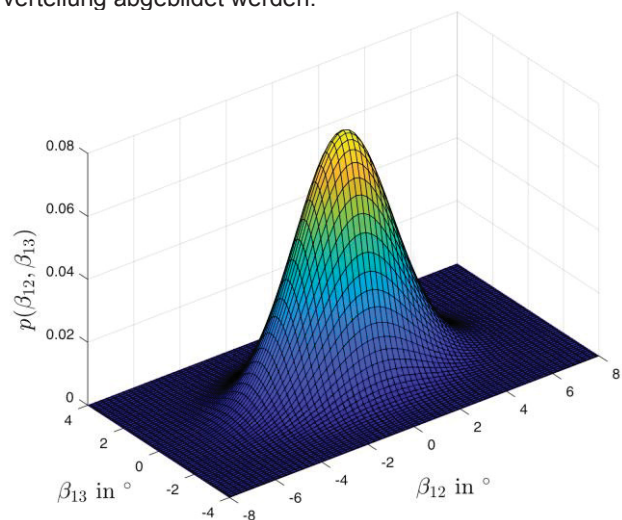


Bild 7: Bivariate Faserorientierungsverteilung mit $s_{12} = 2^\circ$ und $s_{13} = 1^\circ$

Berechnung der Steifigkeiten der ondulierten Einzelschicht

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix $[\bar{Q}]_{ES}$ der ondulierten ES werden die mikromechanische Steifigkeitsmatrix $[\bar{Q}]_{\parallel,\perp}$ ohne Ondulationseinflüsse sowie eine geeignete Dichtefunktion für die Faserorientierungsverteilung benötigt. Da als Dichtefunktion der Faserorientierungen zuvor eine bivariate Normalverteilung gewählt wurde, ist die Faserorientierung im Folgenden durch das Wertepaar (β_{12}, β_{13}) charakterisiert. Durch Polartransformation der mikromechanischen Steifigkeitsmatrix $[\bar{Q}]_{\parallel,\perp}$ vom Faser-Koordinatensystem (\parallel, \perp -KOS) in das KOS der ES (1,2,3-KOS) ergeben sich die von der lokalen Faserorientierung abhängigen Modulmatrizen $[\bar{Q}(\beta_{12}, \beta_{13})]$ im ES-KOS.

$$(18) [\bar{Q}(\beta_{12}, \beta_{13})] = [T(\beta_{13})]_{\parallel,\perp \rightarrow 1,3} \cdot [T(\beta_{12})]_{\parallel,\perp \rightarrow 1,2} \cdot [\bar{Q}]_{\parallel,\perp} \cdot [T(\beta_{12})]_{\parallel,\perp \rightarrow 1,2}^T \cdot [T(\beta_{13})]_{\parallel,\perp \rightarrow 1,3}^T$$

Dabei ist $[T(\beta_{12})]_{\parallel,\perp \rightarrow 1,2}$ die Transformationsmatrix zur Polartransformation von Spannungen in das ES-KOS innerhalb der Schichtebene, also durch Rotation um die 3-Achse der ES. Die vollständigen Transformationsmatrizen sind [2] zu entnehmen. Somit können die Faserorientierungen und -Orientierungsverteilungen in beiden Ebenen berücksichtigt und getrennt voneinander untersucht werden.

Die Verschmierung der mit Formel (18) aufgestellten Steifigkeitsmatrizen erfolgt in Anlehnung an die zuvor hergeleitete Gleichung (16) zur Berechnung der ondulierten Steifigkeitsmatrix. Unter Berücksichtigung einer bivariaten Verteilungsfunktion ist die Steifigkeitsmatrix der ondulierten ES nach der folgenden Gleichung zu berechnen.

$$(19) [\bar{Q}]_{ES} = \iint_{-\infty}^{\infty} [\bar{Q}(\beta_{12}, \beta_{13})] \cdot p(\beta_{12}, \beta_{13}) d\beta_{12} d\beta_{13}$$

Bei dieser Verschmierung werden die faserwinkelabhängigen Steifigkeiten $[\bar{Q}(\beta_{12}, \beta_{13})]$ mit ihrer jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\beta_{12}, \beta_{13})$ gewichtet und in den Grenzen der vorhandenen Faserorientierungen integriert. Dieses Vorgehen ist vergleichbar mit dem Aufstellen der Dehnsteifigkeitsmatrix $[A]$ im Rahmen der KLT. Hier werden die Steifigkeitsmatrizen schichtweise mit ihren jeweiligen Dicken gewichtet und über alle Schichten des MSV aufsummiert.

$$(20) [A] = \sum_i [Q]_i \cdot t_i$$

Da Normalverteilungen im reellen Zahlenraum stets ungleich Null sind, ergeben sich die Integrationsgrenzen $-\infty$ und ∞ von Gleichung (19). Eine analytische Lösung dieses Integrals ist sehr aufwändig und muss für alle Einträge der Steifigkeitsmatrix getrennt erfolgen. Zudem ist dazu die Dichtefunktion $p(\beta_{12}, \beta_{13})$ einzusetzen. Somit ist eine solche Lösung auch nur für den Spezialfall der gewählten Faserorientierungsverteilung gültig. Aus diesen Gründen wird zur Lösung von Gleichung (19) eine numerische Integration empfohlen. Da innerhalb unidirektionaler Einzelschichten Faserwinkelstreuungen von wenigen Grad zu erwarten sind, ist eine numerische Integration zwischen unendlichen Grenzen nicht zielführend. Darum werden die sechsfachen Standardabweichungen $6 \cdot \pm s_{12}$ sowie $6 \cdot \pm s_{13}$ der jeweiligen Ondulationsebenen als Integrationsgrenzen eingesetzt. Außerhalb dieses $6s$ -Intervalls liegen ca. 0,000 000 2 % der Werte der Normalverteilung. Dieser Anteil der Filamente der ES wird somit vernachlässigt.

3.4. Elastizitäten der ondulierten Einzelschicht

In der folgenden Sektion werden die Ergebnisse des zuvor hergeleiteten Modells bezüglich der Elastizitäten ondulierter Einzelschichten präsentiert und diskutiert. Das in den vorherigen Abschnitten dargestellte Modell wurde unabhängig vom Faser- oder Matrixmaterial hergeleitet und ist allgemein gültig.

Zur Berechnung konkreter Ergebnisse wird im Folgenden der Verbund eines Glasfaser-Rovings vom Typ SE2020 und einer Epoxidmatrix aus RIM 135 mit einem FVG von $\varphi = 0,55$ betrachtet. In der folgenden Tabelle 1 sind die angenommenen Komponenteneigenschaften der Verbundpartner angegeben.

Variable	Einheit	Glasfaser	Epoxidharz
E	MPa	81000	3090
G	MPa	33269	1129
ν	(-)	0,22	0,37
R^+	MPa	2200	73
R^-	MPa	2200	217

Tabelle 1: Materialdaten der Komponenten Glasfaser und Epoxidharz

Bild 8 zeigt die Grundelastizitäten der ondulierten ES und deren Abhängigkeit von den verschiedenen Ondulationsformen gemäß dem vorgestellten Modell. Dabei sind die Elastizitätsgrößen über den Standardabweichungen der Faserorientierungen aufgetragen. Je größer die Standardabweichung s ist, umso stärker sind die Fasern onduliert. Die ondulationsbehafeten Elastizitäten sind in den folgenden Abbildungen jeweils für den Fall reiner Ondulation in der ES-Ebene (Ondulation in der 1-2-Ebene), für den Fall reiner Ondulation in Dickenrichtung (Ondulation in der 1-3-Ebene) sowie für den Fall der Kombination beider Ondulationen mit $s_{12} = s_{13}$ (Ondulation in beiden Ebenen) dargestellt. Zur Verdeutlichung der Ondulationseinflüsse sind die Elastizitäten der ES mit dem jeweiligen Wert aus der Mikromechanik normiert. Beim Längsmodul bspw. ist \bar{E}_1/E_{\parallel} aufgetragen. Der mikromechanische Wert E_{\parallel} stellt somit den Idealfall ohne Ondulationseinfluss dar.

In Bild 8 (links oben) ist zu erkennen, dass der Elastizitätsmodul in Faserlängsrichtung \bar{E}_1 mit zunehmender Ondulation in der 1-2-Ebene sowie in der 1-3-Ebene gleichermaßen abnimmt. Werden beide Ondulationen kombiniert, überlagert sich deren Wirkung auf die Steifigkeit. Beim ebenen Schubmodul \bar{G}_{21} (Bild 8, links unten) ist im Gegensatz zum Längsmodul eine deutliche Abhängigkeit zur Ondulationsrichtung erkennbar. Während Ondulationen in der 1-3-Ebene kaum eine Veränderung von \bar{G}_{21} bewirken, haben Ondulationen in der 1-2-Ebene eine Zunahme des Schubmoduls dieser Ebene zur Folge. Da Ondulationen in der Literatur vor allem steifigkeits- und festigkeitsmindernde Eigenschaften zugesprochen werden, ist dieser Schubmodul erhöhende Effekt positiv zu bewerten. Diese versteifende Wirkung bezüglich des Schubmoduls ist sogar größer als der negative Einfluss auf den Längsmodul. Bei einer Ondulation mit $s_{12} = s_{13} = 4^\circ$ nimmt der Längsmodul der ES um ca. 2% ab, während der Schubmodul \bar{G}_{21} um 4,5% zunimmt gegenüber den mikromechanischen Werten ohne Ondulation.

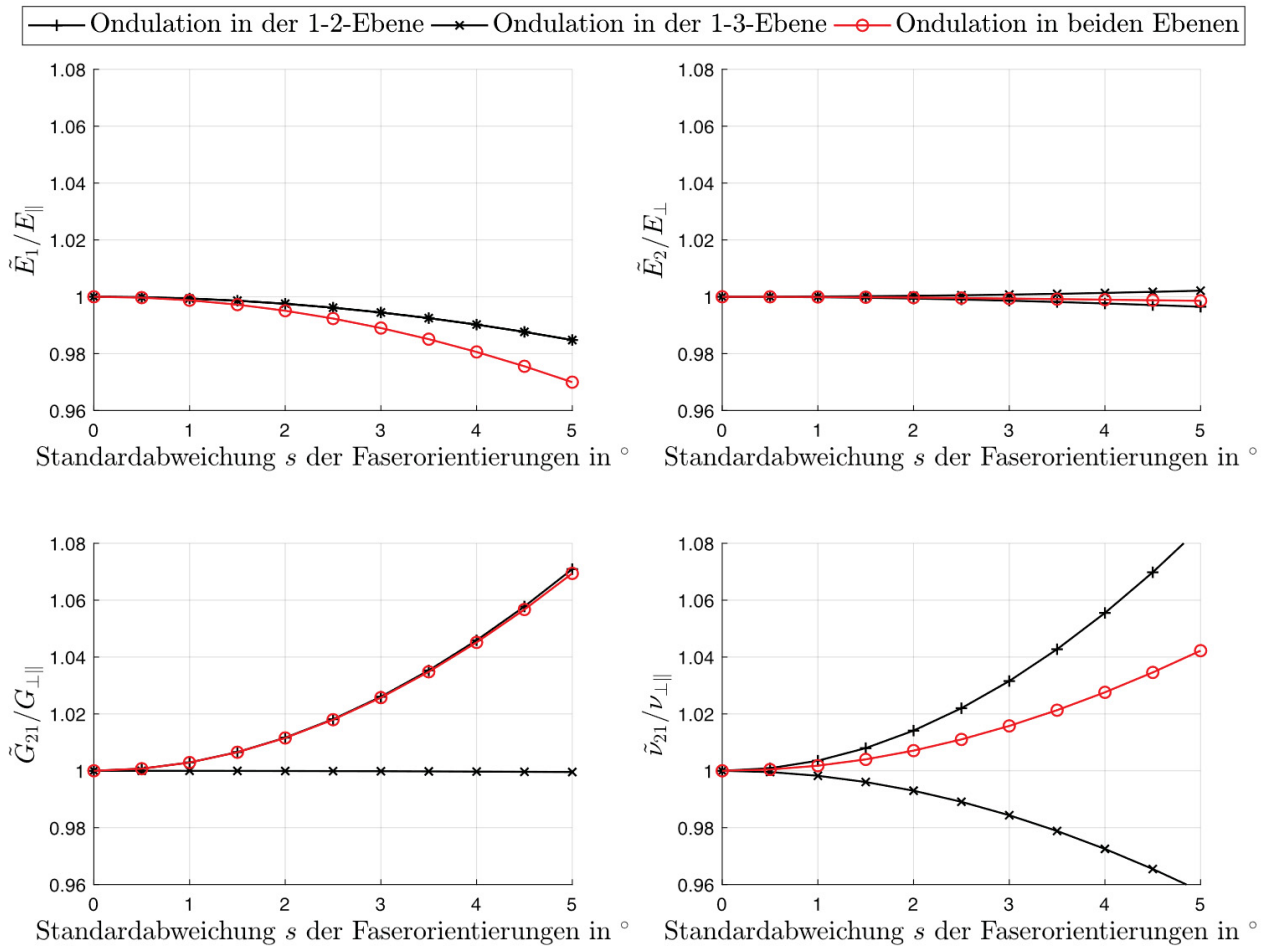


Bild 8: Grundelastizitäten der ondulierten Einzelschicht bei Ondulation in verschiedenen Ebenen

Der Einfluss der Ondulationen auf den Quermodul \tilde{E}_2 sowie auf die Querkontraktionszahl $\tilde{\nu}_{21}$ sind ebenso in Bild 8 (rechts oben und unten) dargestellt. Es zeigt sich, dass Ondulationen der betrachteten Größenordnung keinen nennenswerten Einfluss auf den Quermodul haben. Auf die Querkontraktionszahl $\tilde{\nu}_{21}$ haben Ondulationen in der 1-2-Ebene eine steigernde Wirkung und Ondulationen in der 1-3-Ebene eine abmindernde Wirkung. Bei der Kombination beider Ondulationsebenen heben sich die Wirkungen zum Teil gegeneinander auf.

4. FESTIGKEITEN DER ONDULIERTEN EINZELSCHICHT

Dieser Abschnitt beschreibt die Festigkeitsanalyse für ondulierte Einzelschichten auf Grundlage der hier vorgestellten Modellierung. Dabei werden verschiedene Versagensmechanismen untersucht und diskutiert. Schließlich werden mithilfe des entwickelten Materialmodells Faserlängs-Zug- und -Druckfestigkeiten von ondulierten Einzelschichten bestimmt.

4.1. Festigkeitsanalyse für ondulierte Einzelschichten

Zunächst ist ein allgemeines Vorgehen zur Festigkeitsanalyse für dieses Modell zu erarbeiten. Da innerhalb der ES verschiedene Faserorientierungen vorliegen, sind auch die Beanspruchungen innerhalb der ES sehr vielseitig. Beispielsweise sind bei Belastung der ES in Faserlängsrichtung die ideal in Belastungsrichtung orientierten Fasern

am stärksten beansprucht. Je stärker die Fehlorientierung der Fasern, umso weniger Last trägt die Faser selbst und umso mehr ist die umliegende Matrix beansprucht. Somit besteht ein von der lokalen Faserorientierung abhängiger Spannungszustand. Demzufolge versagt auch die Einzelschicht nicht einheitlich und global, sondern es treten unterschiedliche Versagensmechanismen auf, die bei verschiedenen äußeren Lasten zu lokalen Schädigungen führen. Um trotzdem Aussagen bezüglich der Tragfähigkeit der ondulierten ES zu treffen, sind sinnvolle Versagenskriterien zu formulieren.

Das Vorgehen bei der Festigkeitsanalyse erfolgt in Anlehnung an die schichtweise Festigkeitsanalyse im Rahmen der KLT. Bild 9 zeigt dieses Vorgehen schematisch. Grundlage dieser Festigkeitsanalyse ist die Dehnungskompatibilität gemäß Gleichung (15). Mithilfe der Steifigkeitsmatrix der ondulierten ES ergeben sich die globalen Dehnungen $\{\tilde{\varepsilon}\}_{ES}$ aus den in der Schicht global wirkenden Spannungen.

$$(21) \quad \{\tilde{\varepsilon}\}_{ES} = [\tilde{Q}]_{ES}^{-1} \cdot \{\sigma\}_{ES}$$

Unter Annahme der Dehnungskompatibilität gilt der globale Dehnungsvektor $\{\tilde{\varepsilon}\}_{ES}$ für jedes Element der ondulierten ES. Im nächsten Schritt ist die globale Dehnung in die lokalen Faser-Koordinaten (abhängig von der lokalen Faserorientierung) zu transformieren. Dadurch ergeben sich die Dehnungen im lokalen Faser-KOS.

$$(22) \quad \{\varepsilon\}_{\text{lokal}} = [T(\beta)] \cdot \{\tilde{\varepsilon}\}_{ES}$$

Diese lokalen Dehnungen können nun in lokale Spannungen überführt werden. Da hierbei mikromechanische Elemente aus Einzelfaser und Matrix betrachtet werden, ist nun das mikromechanische Stoffgesetz anzuwenden.

$$(23) \quad \{\sigma\}_{\text{lokal}} = [\bar{Q}]_{\perp\perp} \cdot \{\varepsilon\}_{\text{lokal}}$$

Mithilfe dieser lokalen mikromechanischen Spannungszustände können nun bekannte Versagenskriterien angewandt und analysiert werden.

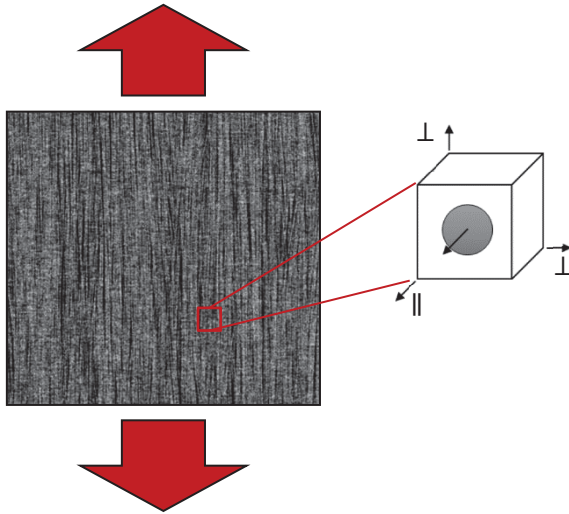


Bild 9: Prinzipdarstellung der Festigkeitsanalyse bei ondulierten Einzelschichten

4.2. Zugfestigkeit in Faserlängsrichtung

In Bild 10 sind die lokalen Versagensspannungen bei Zugbeanspruchung über der lokalen Faserrichtung für eine ondulierte ES aufgetragen. In diesem Beispiel wird eine reine Ondulation in der Schichtebene mit $s_{12} = 4^\circ$ betrachtet. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte der Faserrichtungen $p(|\beta_{12}|)$ ist ebenfalls mit aufgetragen.

Bei dieser Analyse werden die zwei Versagensmechanismen Faserbruch (FB) und Zwischenfaserbruch (ZFB) gemäß den Versagenskriterien nach PUCK [14] betrachtet. Die lokalen Versagensspannungen für FB $R_{\text{FB}}(\beta_{12})$ sowie für ZFB $R_{\text{ZFB}}(\beta_{12})$ sind normiert mit der mikromechanischen Zugfestigkeit R_{\parallel}^+ gemäß Mischungsregel (8) dargestellt.

Zunächst ist zu erkennen, dass die in Belastungsrichtung orientierten Fasern zuerst auf FB versagen. Je stärker die Fehlorientierung der Faser ist, umso geringer ist die Beanspruchung auf FB und umso größer ist die Anstrengung der umliegenden Matrix. Ab einer lokalen Fehlorientierung von ca. 10° wechselt in diesem Beispiel der Versagensmodus, sodass zuerst ZFB auftritt. Um eine Aussage über das globale Versagen der ES zu treffen, ist nun die Verteilungsdichte der Faserrichtungen zu berücksichtigen. Da der Anteil der stark fehlorientierten Fasern, die zuerst auf ZFB versagen, sehr gering ist, ist nicht davon auszugehen, dass diese Zwischenfaserbrüche zum globalen Versagen der ES führen. Wird jedoch lokal die Versagensspannung auf FB erreicht, verliert die ES signifikant an Tragfähigkeit. Da die ideal in 0° -Richtung orientierten Fasern zuerst auf Faserbruch versagen, wird deren Versagensspannung als Festigkeitsgrenze der ES angenommen.

Es ist zu erkennen, dass diese Versagensspannung leicht unterhalb der mikromechanisch berechneten Zugfestigkeit R_{\parallel}^+ liegt. Diese Festigkeitsabnahme resultiert aus der ondulationsbedingten Abnahme der Zugsteifigkeit in Faserlängsrichtung. Aufgrund der größeren Nachgiebigkeit der ondulierten ES wird die Bruchdehnung der 0° -Fasern schon bei geringeren globalen Spannungen erreicht. Ausgehend von einer einheitlichen Bruchdehnung der Fasern lässt sich eine einfache Mischungsregel für die Längszugfestigkeit \tilde{R}_1^+ der ondulierten ES ableiten:

$$(24) \quad \tilde{R}_1^+ = R_{\parallel}^+ \cdot \frac{\bar{E}_1}{E_1}$$

Die mit dieser Mischungsregel berechnete normierte Zugfestigkeit $\tilde{R}_1^+/R_{\parallel}^+$ ist in Bild 10 durch ein „X“ gekennzeichnet. Diese einfache Formel zeigt sehr gute Übereinstimmung mit dem lokalen Faserbruchkriterium nach Puck für die 0° -Fasern $R_{\text{FB}}(\beta_{12} = 0^\circ)$.

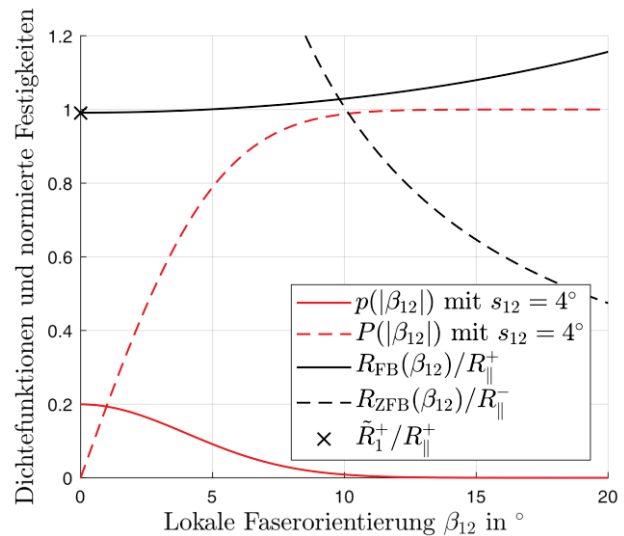


Bild 10: Festigkeitsanalyse einer ondulierten ES bei Zugbeanspruchung in Faserrichtung

4.3. Druckfestigkeit in Faserlängsrichtung

In der folgenden Sektion wird die Druckfestigkeit bei Belastung in Faserrichtung unter Berücksichtigung von Ondulationen analysiert. Es existiert eine Vielzahl an wissenschaftlichen Arbeiten, die das Versagen von FKV bei Druckbelastungen untersucht. Allgemein kann zusammengefasst werden, dass das Versagen eines FKV unter Druckbelastung auf die folgenden drei Versagensmechanismen zurückgeführt wird:

- Faserbruch
- Schubknicken
- Mikroknicken

Das Versagen bezüglich Faserbruch kann mit dem Festigkeitsmodell von PUCK [14] abgebildet werden. Analog zur Festigkeitsanalyse bei Zugbelastung bietet die einfache Mischungsregel (24) ein adäquates Versagenskriterium für Faserbruch unter Druckbelastung.

Schubknicken und Mikroknicken

Die erste Berechnung der faserparallelen Druckfestigkeit auf Grundlage von Stabilitätsversagen wurde von ROSEN in [15] entwickelt. Es wird beschrieben, dass das Versagen

des Verbundes auf Instabilitäten der Verstärkungsfaser zurückzuführen ist. Ab einer bestimmten Last werden die Fasern seitlich ausgelenkt - es tritt Schubknicken (SK) auf. Dieses Verhalten wird vor allem durch die Schubsteifigkeit der Matrix G_M beeinflusst. Als Vereinfachung wird in der Berechnung von einem perfekten Verbund mit perfekt geraden Fasern ausgegangen. Damit wird die Druckfestigkeit stark überschätzt.

$$(25) \quad R_{\parallel,SK}^- = \frac{G_M}{1-\varphi}$$

Unter dem Ansatz des Stabilitätsversagens durch Mikroknicke untersucht BUDIANSKY in [16] lokalisierte Fehlrichtungen der Fasern unter einem konstanten Winkel β . Darin wird gezeigt, dass die Druckfestigkeit schon durch kleine Abweichungen vom perfekten System stark abgemindert wird. BUDIANSKY stellt hierbei den mechanisch ungünstigsten Fall dar, in dem alle Fasern in Phase ausgerichtet sind, und somit auch in Phase ausknicken können. In FKV können solche Stellen mit einem konstanten Winkel zwar lokal auftreten, wie zum Beispiel durch Fehler im Umgang mit den Gelegen, aber bei einer globalen Betrachtung sind die Faserwinkel normalverteilt. Somit tritt eine Lastverteilung innerhalb der ES auf. Stark ausgerichtete Fasern nehmen durch eine höhere effektive Steifigkeit für den Verbund höhere Lasten auf als fehlorientierte Fasern. Dadurch tritt eine Stützwirkung stark ausgerichteter Fasern auf die stabilitätsgefährdeten Bereiche mit größeren Fehlorientierungen auf.

BARBERO untersucht in [17] diesen Stützeffekt im Hinblick auf Stabilitätsversagen unter Berücksichtigung einer Normalverteilung der Faserwinkel. Dabei stellt er die maximal ertragbare Spannung, die zum Stabilitätsversagen führt, in Abhängigkeit einer konstanten Fehlorientierung auf. Jedes Druckspannungsniveau $\tilde{\sigma}(\beta)$ kann nur von Fasern mit einer kleineren Fehlrichtung als β getragen werden. Alle Fasern mit einer größeren Fehlrichtung als β sind bereits über ihrer kritischen Knicklast und nehmen keine signifikanten zusätzlichen Spannungen auf. Der tragende Anteil der Querschnittsfläche, welcher Winkel kleiner oder gleich β aufweist, kann durch die kumulierte Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\beta)$ der Normalverteilung dargestellt werden. Die aufgebrauchte Spannung ergibt sich dann als tatsächliche Spannung multipliziert mit dem Anteil der Fasern $P(\beta)$, der dieses Lastniveau aufnehmen kann:

$$(26) \quad \sigma(\beta) = \tilde{\sigma}(\beta) \cdot P(\beta)$$

Die Druckfestigkeit der ondulierten ES berechnet sich dann als die maximal ertragbare Spannung.

$$(27) \quad R_{\parallel}^- = \max(\sigma(\beta))$$

Diese Gleichung kann explizit gelöst werden, was allerdings zu einer recht komplexen Formel führt. Daher gibt BARBERO in [7] die folgende Näherungslösung für die durch Mikroknicke (μK) bestimmte Druckfestigkeit an:

$$(28) \quad R_{\parallel,\mu K}^- = G_{12} \left(1 + 4,76 \cdot \frac{G_{12}s_{\beta}}{R_{\perp\parallel}} \right)^{-0,69}$$

Hierbei ist s_{β} die Standardabweichung der Faserfehlorientierungen.

Matrixbruch initiiertes Druckversagen

Bei den bisherigen Stabilitätsbetrachtungen zu FKV unter Druckbelastung wird ein Knicken der Fasern auf elastischer Bettung betrachtet. Dabei wird stets von einer vollständig intakten Matrix ausgegangen – Schädigungen der Matrix

werden nicht berücksichtigt. Bei der Festigkeitsanalyse unter Zugbelastung wurde jedoch festgestellt, dass vor dem globalen Versagen durch Faserbruch schon Zwischenfaserbrüche bei den stärker fehlorientierten Fasern auftreten. Bei Zugbeanspruchung sind diese ZFB nicht kritisch, unter Druck reduzieren sie aber die Stützwirkung der Matrix. Um diesen Effekt zu berücksichtigen wird ein neuer Ansatz eines Versagensmechanismus formuliert.

Dieser Ansatz basiert auf der Annahme, dass die Matrix nur so lange eine stützende Wirkung ausübt, wie sie intakt ist. Eine lokale Schädigung der Matrix bewirkt, dass die eingebettete Faser nicht mehr gestützt wird und somit keine zusätzlichen Lasten mehr aufnehmen kann. Zur Darstellung der Matrixbeanspruchungen wird das in [12] vorgestellte Modell von Krimmer verwendet. Dieses Modell ermöglicht es für ein mikromechanisches Faser-Matrix-Element anhand der äußeren Spannungen reine Matrix-Spannungen zu berechnen. Da die Matrix selbst ein isotroper Werkstoff ist, können diese in-situ Matrixspannungen mithilfe der Formänderungsenergiehypothese nach BELTRAMI von 1885 in eine Vergleichsspannung bzw. eine äquivalente Matrixspannung σ_{Me} überführt werden. Die Anstrengung der Matrix e_M bei einem gegebenen Spannungsvektor kann dann als Verhältnis der äquivalenten Matrixspannung zur Zugfestigkeit der Matrix berechnet werden:

$$(29) \quad e_M = \frac{\sigma_{Me}}{R_M^+}$$

Eine Anstrengung von $e_M \geq 1$ führt zur Rissbildung in der Matrix. Demzufolge lautet das Schadenskriterium für diese Form der Matrixschädigung:

$$(30) \quad \frac{\sigma_{Me}}{R_M^+} = 1$$

Wie zuvor hergeleitet können die lokalen Spannungen $\{\sigma\}_{\text{lokal}}$ mithilfe der Gleichungen (21) bis (23) anhand der global auf die ES wirkenden Spannungen $\{\sigma\}_{ES}$ berechnet werden. Da die lokale Spannung vor allem durch die lokale Faserorientierung bestimmt ist, wird diese im Folgenden mit $\{\sigma(\beta)\}$ bezeichnet. Basierend auf dem Schadenskriterium (30) lässt sich die lokale Versagensspannung der Matrix $R_{\parallel M}$ wie folgt berechnen:

$$(31) \quad R_{\parallel M}(\beta) = \frac{\{|\sigma_{ES}|\}}{e_M(\{\sigma(\beta)\})}$$

Die bei dieser Versagensspannung eintretende Rissbildung in der Matrix führt nicht zwangsläufig zum Versagen der ES. Das bedeutet, die gegebene Formel liefert nicht die Festigkeit der ES, sondern stellt die Schadensinitiation durch Matrixbruch (MB) dar. Bild 11 zeigt u.a. die lokalen Versagensspannungen $R_{\parallel M}(\beta_{12})$ der Matrix in Abhängigkeit zur lokalen Faserorientierung für eine reine Betrachtung in der ES-Ebene. Um nun eine Aussage über die Tragfähigkeit der gesamten ES treffen zu können, ist erneut die Umverteilung der Spannungen zu betrachten, wenn einzelne Fasern ihre kritische Last überschreiten. In Anlehnung an [17] wird der tragende Anteil der Querschnittsfläche der ES durch die kumulierte Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(|\beta_{12}|)$ abgebildet. Die ertragbare Spannung ergibt sich wieder aus dem Produkt der lokalen Versagensspannung mit dem Querschnittsanteil, der diese Spannung erträgt. Das Maximum dieses Produkts stellt die Druckfestigkeit der ondulierten ES dar.

$$(32) \quad \tilde{R}_{\parallel,MB}^- = \max(R_{\parallel M}(\beta) \cdot P(|\beta|))$$

Dieser Festigkeitswert ist in Bild 11 durch ein blaues „X“ gekennzeichnet. Der hier als Matrixbruch (MB) bezeichnete Versagensmodus ist nicht als reines Stabilitätsphänomen wie das Mikroklicken zu verstehen. Das Ausknicken der Fasern tritt erst ein, wenn eine kritische Schädigung der Matrix erreicht ist. Denn ab diesem kritischen Punkt, werden die Fasern nicht mehr hinreichend gestützt, um weitere Drucklasten aufzunehmen. Die eigentliche Ursache dieses Versagens ist also die Schädigung der Matrix und das Ausknicken der Fasern ist die Folge.

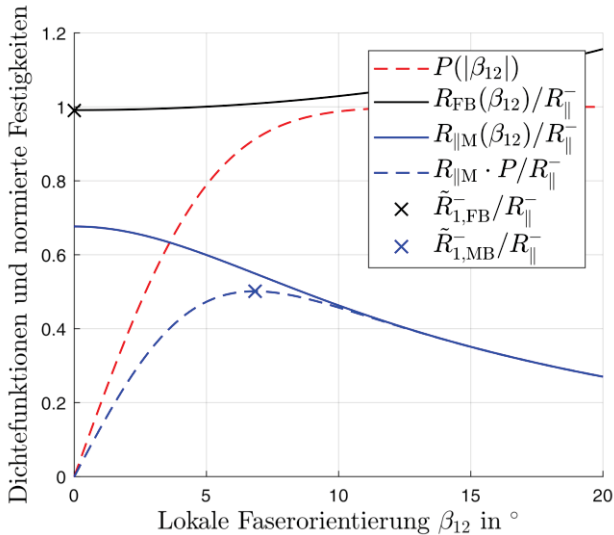


Bild 11: Festigkeitsanalyse einer ondulierten ES bei Druckbeanspruchung in Faserrichtung

4.4. Ergebnisse der Festigkeitsanalyse

In Bild 12 sind nun die Ergebnisse der zuvor vorgestellten Festigkeitsanalysen zusammengefasst. In dieser Darstellung sind die Festigkeiten der ondulierten ES bei Belastung in Verstärkungsrichtung über der Standardabweichung der Faserorientierungen in der Schichtebene aufgetragen. Es werden hier also Ondulationen in der 1-2-Ebene betrachtet. Die dargestellten Ergebnisse wurden mithilfe der Materialdaten aus Tabelle 1 und für ein FVG von $\varphi = 0,55$ berechnet.

Wie zuvor diskutiert ist bei Zugbeanspruchung das Versagen des FKV auf Faserbruch zurückzuführen. Diese ondulationsbehaftete Zugfestigkeit $\tilde{R}_{1,FB}^+$ wurde mit der hergeleiteten Mischungsregel (24) berechnet. Diese Mischungsregel zeigt sehr gute Übereinstimmung mit dem Faserbruchkriterium nach Puck. Dieselbe Mischungsregel wurde benutzt, um die Versagensgrenze für Faserbruch bei Druckbelastung $\tilde{R}_{1,FB}^-$ zu bestimmen. Da für die betrachtete Glasfaser keine unterschiedlichen Festigkeiten für Zug- und Druckbeanspruchung verfügbar sind, ergeben sich auch für den FKV identische Zug- und Druckfestigkeiten bezüglich FB. Die Faserbruchfestigkeit liegt für die zugrundeliegende Faser-Matrix-Kombination über 1200 MPa und zeigt kaum Abhängigkeit von der Ondulation.

Bei Druckbeanspruchung kann diese Festigkeitsgrenze jedoch nicht erreicht werden, da zuvor andere Versagensmechanismen wirken. Die rote Funktion in Bild 12 stellt die mit Gleichung (28) berechnete Druckfestigkeit $\tilde{R}_{1,\mu K}^-$ dar, die durch Mikroklicken (μK) ausgelöst wird. Daran ist zu erkennen, dass dieser Versagensmechanismus bei Einzelschichten mit sehr geringer Ondulation nicht zur Wirkung

kommt. Ein Laminat mit sehr geringer Ondulation könnte nach diesem Modell die Faserbruchfestigkeit erreichen. Mit zunehmender Ondulation gibt das μK -Modell von BARBERO eine starke Abnahme der Druckfestigkeit auf ca. ein Drittel der durch FB bestimmten Festigkeit bei $s_{12} = 4^\circ$ an.

Das in dieser Arbeit entwickelte Festigkeitsmodell ist in Bild 12 durch die blaue Kurve dargestellt. Der zugrundeliegende Versagensmechanismus ist ein durch eine kritische Matrixschädigung initiiertes Ausknicken der Fasern. Dieses Modell zeigt eine stetige Abnahme der Druckfestigkeit $\tilde{R}_{1,MB}^-$ mit steigender Standardabweichung der Faserfehlorientierung. Nach diesem Modell kann die theoretische Faserbruchfestigkeit bei Druckbeanspruchung nicht erreicht werden. Auch ohne Ondulation versagt die hier berechnete GFK-ES bei einer Druckspannung von 876 MPa aufgrund der Matrixschädigung. Bei einer Ondulation von $s_{12} = 4^\circ$ liegt die mit Gleichung (32) berechnete Druckfestigkeit noch bei 630 MPa.

Im Vergleich mit Literaturwerten liefert das hier vorgestellte Modell für die Druckfestigkeit $\tilde{R}_{1,MB}^-$ bei Belastung in Faserrichtung realistische Werte. In [18] wird bspw. für GFK eine Faserparallele Druckfestigkeit von ca. 800 MPa angegeben. Die Ergebnisse dieses Modells sind noch experimentell zu validieren.

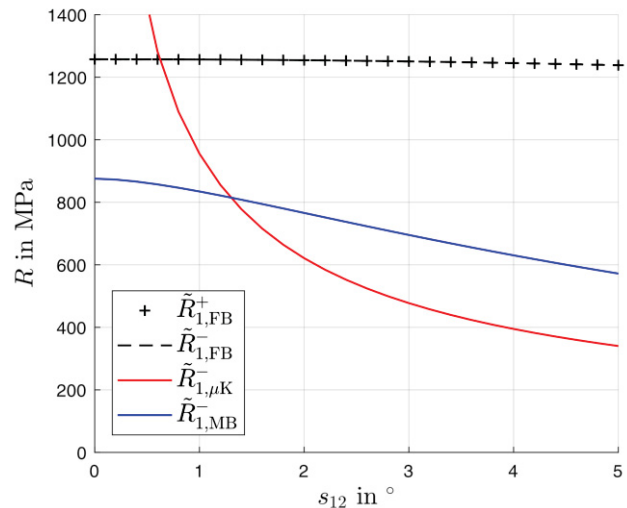


Bild 12: Festigkeiten ondulierter Einzelschichten in Abhängigkeit des Versagensmechanismus sowie der Standardabweichung der Faserorientierungen (berechnet mit $\varphi = 0,55$; Glasfaser SE2020; Matrix RIM135)

5. FAZIT UND AUSBLICK

5.1. Fazit

In diesem Paper wurde ein neues analytisch-stochastisches Materialmodell für unidirektional verstärkte Faserkunststoffverbunde (FKV) vorgestellt. Dieses Modell beschreibt Faserondulationen mithilfe von stochastischen Verteilungsfunktionen. Mithilfe des multiskalaren Modellaufbaus und ausgehend von der Betrachtung eines RVE einer ondulierten ES wurde das Stoffgesetz unter Berücksichtigung von Ondulationen hergeleitet. Zur Beschreibung der Faserorientierungsverteilungen wurde in dieser Arbeit eine bivariate Normalverteilungsfunktion eingesetzt. Damit lassen sich alle Elastizitätseigenschaften der ondulierten Einzelschicht berechnen und die richtungsabhängigen Einflüsse der Faserfehlorientierungen abbilden

und analysieren. Neben einer Abnahme der Steifigkeit in Faserlängsrichtung zeigt das Modell mit zunehmender Ondulation in der Schichtebene eine Steigerung des Schubmoduls.

Aufbauend auf dieser Modellierung wurde eine Methodik zur Festigkeitsanalyse unter Berücksichtigung der Ondulationen beschrieben. Darauf aufbauend wurden die Zug- und Druckfestigkeiten bei Beanspruchung in Faserlängsrichtung untersucht. Das Versagen bei Zugbeanspruchung wurde im Wesentlichen auf Faserbruch zurückgeführt. Die daraus resultierende Festigkeit wird nur geringfügig durch die Ondulation beeinflusst. Bei der Analyse der Druckfestigkeit in Faserrichtung wurden die Versagensmechanismen Faserbruch, Mikroknicke und Matrixbruch untersucht und verglichen. Für den letzten Versagensmodus wurde ein eigenes Modell entwickelt. Dieses Versagensmodell gibt eine Druckfestigkeit an, bei der eine kritische Matrixschädigung erreicht ist, sodass die Matrix keine hinreichende Stützwirkung mehr besitzt. Die hiermit berechneten Druckfestigkeiten liegen in einem realistischen Bereich.

Insgesamt liefert dieses Materialmodell allein anhand der Materialdaten der Komponenten Glasfaser und Epoxid-Matrix realistische Festigkeits- und Elastizitätskennwerte für den Verbund.

5.2. Ausblick

Die Ergebnisse des vorgestellten Materialmodells sind noch experimentell zu validieren. Dazu werden normgerechte Materialprüfungen an Couponproben durchgeführt. Geplant ist eine erste Probenserie für Zug- und Druckprüfungen in Faserrichtung. Die Proben werden im Wickelverfahren aus den hier in der Berechnung verwendeten Halbzeugen (Glasfaser-Roving SE2020 und Epoxidmatrix RIM 135) hergestellt. Bei diesen Versuchen werden insbesondere die mit dem vorgestellten Modell berechneten Druckfestigkeiten überprüft, weil sich hier der Ondulationseinfluss am besten abbilden lässt.

Die Faserorientierungsverteilungen der Materialproben werden mittels Mikro-Röntgencomputertomografie (μ CT) ermittelt. Dieses Verfahren liefert ein dreidimensionales Abbild der inneren Struktur des Materials, wie es in Bild 6 zu sehen ist. Aus diesen Daten lassen sich die für das vorgestellte Materialmodell benötigten Faserorientierungsverteilungen gewinnen. So kann für jede Probe auf Grundlage des μ CT-Scans eine individuelle Prognose der mechanischen Eigenschaften berechnet werden. Diese berechneten Eigenschaften können dann direkt mit den experimentellen Ergebnissen verglichen werden, um das Materialmodell zu validieren.

Weiterhin wird das bestehende Materialmodell ausgebaut und weitere Parameterstudien durchgeführt. In diesem Paper wurde bei der Festigkeitsanalyse nur die Ondulation in der Schichtebene betrachtet. Dieses Modell ermöglicht aber auch bezüglich der Festigkeiten dreidimensionale Ondulationen zu berücksichtigen. Weitere Studien sollen zeigen, wie sich verschiedene Kombinationen der Ondulation in Dickenrichtung und in der Schichtebene auf die Festigkeiten auswirken. Darüber hinaus wurden Eigenspannungen durch Temperatur und Feuchtigkeit bisher nicht berücksichtigt. Diese Einflussfaktoren werden zukünftig auch in diesem Modell implementiert.

6. VERWEISE

- [1] Z. Hashin and B. Walter Rosen, "The elastic moduli of fiber-reinforced materials," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 1964.
- [2] V. D. Ingenieure, *Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund*. 2014.
- [3] A. Puck, *Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtenverbund-Bauelementen*. Hanser, 1967.
- [4] A. Krimmer, "Mikromechanische Modellierung von Fasergelege-Kunststoff-Verbunden auf Basis von Normprüfungen unter Berücksichtigung der in-situ-Eigenschaften der Matrix," 2014.
- [5] R. Basan, *Untersuchung der intralaminaren Schubeigenschaften von Faserverbundwerkstoffen mit Epoxidharzmatrix unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte*. 2011.
- [6] P. P. Camanho, C. G. Davila, S. T. Pinho, and J. J. C. Remmers, *Mechanical Response of Composites Computational Methods in Applied Sciences*. 2008.
- [7] E. J. Barbero, *Introduction to Composite Materials Design*, 3rd ed. CRC Press, 2017.
- [8] C. Metzner, D. Gizik, A. Gessler, C. Weimer, J. Kaufmann, and L. Kroll, "Studie der Einflussparameter an mit unidirektional geflochtener Carbonfaser verstärkten Kunststoffen," *J. Plast. Technol.*, vol. 12, pp. 239–258, 2016.
- [9] V. Trappe, S. Hickmann, A. Kupsch, B. R. Müller, R. Laquai, and M. De Monte, "Risse an gekerbten kurzglasfaserverstärkten Thermoplasten zerstörungsfrei charakterisiert mit Röntgenverfahren," in *DGZfP Jahrestagung 2017*, 2017, pp. 1–11.
- [10] S. W. Yurgartis, "Measurement of Small Angle Fiber Misalignments in Continuous Fiber Composites," *Compos. Sci. Technol.*, vol. 30, no. 4, pp. 279–293, 1987.
- [11] S. Thomas, "Parametrisierung der faserparallelen Druckfestigkeiten von Carbonfaser-Kunststoff-Verbunden mit Hilfe eines probabilistisch basierten Materialmodells," Technische Universität Berlin, 2019.
- [12] A. Krimmer, "Assessment of quasi-static and fatigue performance of uni-directionally fibre reinforced polymers on the basis of matrix effort," in *6th EASN conference - Proceedings*, 2016, no. 6, pp. 253–264.
- [13] H. Schürmann, *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2007.
- [14] A. Puck, *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten*. Carl Hanser Verlag München Wien, 1996.
- [15] B. W. Rosen, "Mechanics of composite strengthening," *Fiber Composite Mater.*, 1965.
- [16] B. Budiansky, "Micromechanics," *Comput. Struct.*, 1983.
- [17] E. J. Barbero, "Prediction of compression strength of unidirectional polymer matrix composites," *J. Compos. Mater.*, 1998.
- [18] AVK - Industrievereinigung Verstärkte Kunststoffe e.V., *Handbuch Faserverbundkunststoffe/Composites*. Springer, 2015.