

STRUKTURMECHANISCHE BLISK-AUSLEGUNG UNTER VERWENDUNG VON METAMODELLEN

I. Reuter¹, M. Voigt¹, R. Mailach¹, K.-H. Becker², A. Fischersworing-Bunk²,
 H. Schlums³, M. Ivankovic⁴

¹Technische Universität Dresden
 Professur für Turbomaschinen und Flugantriebe
 D-01062 Dresden, Germany

²MTU Aero Engines AG
 Structural Mechanics, Probabilistic
 D-80995 München, Germany

³Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG
 Rotatives Engineering
 D-15827 Blankenfelde-Mahlow, Germany

⁴Ansaldo Energia Switzerland AG
 Mechanical Integrity
 5401 Baden, Switzerland

Zusammenfassung

Die Zielsetzung von Metamodellanwendungen ist es, eine große Menge an Systeminformationen aus einem gegebenen Datensatz zu prognostizieren. Anwendungsgebiete innerhalb eines computergestützten Auslegungsprozess sind z.B. Optimierungsaufgaben, Auslegung eines robusten Designs oder Sensitivitätsanalysen. Diese Art der Auslegungsstrategie ist ideal für die schnelle Vorauslegung zukünftiger Turbomaschinenkomponenten.

Die vorliegende Veröffentlichung beinhaltet die Metamodellverfahren: Polynom-Regression - Least Squares (LS), Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO), Moving-LS (MLS) und Radiale Basisfunktionen (RBF). Der Fokus liegt in der Selektion des Metamodells, welches die beste Prognosefähigkeit für den jeweiligen Datensatz besitzt.

Für die strukturelle Auslegung der Blisk wurde eine vollautomatische Prozesskette von der Geometrievariation bis hin zur FE-Analyse entwickelt. Das FE-Modell beschreibt dabei drei statische Belastungszustände - Start, Steigen und Reiseflug.

Basierend auf dieser Prozesskette und definierten geometrischen Designgrenzen wird eine Monte-Carlo-Simulation (MCS) durchgeführt und analysiert. Ein separates Auswertungsnetz und das HDF5-Datenformat dienen dazu, um für jeden einzelnen Flugzustand die resultierenden Daten der MCS an topologisch gleichen Orten zu verwalten. Abschließend werden die Sensitivitäten zwischen geometrischen Eingangsgrößen und resultierenden Spannungen ausgewertet und eine Designempfehlung auf Basis von Metamodellen gegeben.

Keywords

Metamodelle, Ersatzmodelle, Flugtriebwerk, Blisk, Robustheit, Sensitivitäten, geometrischer Entwurf

NOMENKLATUR UND ABKÜRZUNGEN

B	Eingangsgrößen eingesetzt in den Polynomansatz	\hat{y}, \hat{Y}	approximierte Ausgangsgrößen
c, C	Polynomkoeffizienten	ϵ	Fehlerterm im LS-Verfahren
d_θ	gewichtete euklidische Distanz	θ	Wichtung innerhalb d_θ
h	relative Häufigkeit	λ	Wichtungsterm im LASSO-Verfahren
H	absolute Häufigkeit	σ_{norm}	höchste Hauptspannung normiert mit der maximalen höchsten Hauptspannung im Ausgangsdesign unter Startbedingungen
n_c	Anzahl an Polynomkoeffizienten	φ, Φ	Basisfunktionen im RBF-Verfahren
n_k	Anzahl an Eingangsgrößen	ADMM	alternating direction method of multipliers
n_{sim}	Anzahl an Realisierungen	KCV	kfold-Kreuzvalidierung
p	Polynomordnung	LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
\tilde{r}	Spearman-Korrelationskoeffizient	LS	Least Squares
R^2	Bestimmtheitsmaß	MCS	Monte-Carlo-Simulation
svr	Verhältnis aus Realisierungen zu Eingangsgrößen	MLS	Moving Least Squares
w, \mathbf{W}	Wichtung im MLS-Verfahren	RBF	Radiale Basis Funktionen
$x, \mathbf{x}, \mathbf{X}$	Eingangsgrößen-Stichprobe	RKCV	wiederholende KCV
$\hat{x}, \hat{\mathbf{X}}$	zu approximierende Eingangsgrößen-Stichprobe	WLS	Weighted LS
y	Ausgangsgrößen		

1. EINLEITUNG

Für den robusten und zuverlässigen Betrieb von Turbomaschinen ist es empfehlenswert, stochastische Eingangsgrößen im computergestützten Auslegungsprozess zu berücksichtigen. Je eher diese Art der Auslegungsphilosophie in die Bauteilentwicklung integriert wird, desto größer sind die Vorteile hinsichtlich Auslegungszeit, Betriebsbereiche und Flexibilität. Ein Verfahren zur Berücksichtigung von stochastischen Eingangsgrößen bietet die MCS, dabei werden die Eingangsgrößen mit ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion definiert. Die Auswertung einer einzelnen MCS führt zu wertvollen Informationen, welche zur Bewertung der Systemsensitivitäten und -robustheit bzw. zur Erkundung des Entwurfsraumes verwendet werden können.

Trotz der Möglichkeit zur Parallelisierung einer MCS kann die komplette Untersuchung, in Abhängigkeit von dem verwendeten deterministischen Modell, zu einer zeitaufwendigen Analyse führen. Entsprechender Aufwand wird investiert, um die Anzahl an Computersimulationen so klein wie nur möglich zu halten aber gleichzeitig die notwendigen bzw. die maximal mögliche Menge an Systeminformationen aus einem bestehenden Datensatz zu extrahieren. Für diese Aufgabe haben sich u.a. sogenannte Metamodelle etabliert, wobei ein mathematisches Interpolations- bzw. Regressionsmodell für den betrachteten Zusammenhang ermittelt wird. Dieses Vorgehen kann den stochastischen Designprozess entscheidend beschleunigen, wobei sich nachfolgende Systemaussagen oder Designempfehlungen auf dem gefundenen Metamodell stützen.

Die Aussage, dass das am besten geeignete Metamodell von der Problemstellung und dem entsprechenden Datensatz abhängt, wird in der Literatur ausgiebig diskutiert, siehe [1, 2, 3]. Weiterhin existiert keine definitive Aussage darüber, welches Metamodellverfahren den anderen Verfahren hinsichtlich seiner Prognosefähigkeiten überlegen ist. Gründe für dieses Verhalten sind u.a. folgende Modelleigenschaften:

- multivariate Anwendung - Anzahl an Variablen n_k , Anzahl an wichtigen Variablen
- Informationsmenge - Anzahl an Computersimulationen n_{sim} (Realisierungen)
- Verhältnis zwischen Anzahl an Realisierungen und Anzahl an Variablen $svr = \frac{n_{sim}}{n_k}$
- Systemverhalten des untersuchten Datensatzes - linear, monoton nicht linear oder nicht monoton
- verwendeter Versuchsplan.

Aus diesem Grund wurde in der vorliegenden Veröffentlichung ein Metamodellframework entwickelt, um für jede Art von System ein bestmögliches Metamodell anbieten zu können. Hierfür wird mit den Verfahren Polynom-Regression - LS, MLS, LASSO und RBF ein Metamodell generiert und das Metamodell mit der besten Prognosequalität für die nachfolgende Systemanalyse verwendet. Problemstellungen des Ingenieurwesens beinhalten oft eine hohe Anzahl an Eingangsgrößen. Um eine signifikante Teilmenge dieser Eingangsgrößen zu selektieren, wurde für die vorliegende Veröffentlichung das Verfahren der Vorwärtsselktion verwendet. Mit dieser Teilmenge an Variablen und den angesprochenen Verfahren werden zusätzliche Metamodelle generiert und dem Metamodellselektionsprozess hinzugefügt.

Die strukturmechanische Analyse einer Verdichterblisk unter Verwendung stochastischer Verfahren wird in der vorliegenden Publikation präsentiert. Für die hier verwendeten geometrischen Eingangsgrößen liegen Designgrenzen und exemplarisch angenommene Fertigungstoleranzen vor. Eine vollautomatische Prozesskette wurde erstellt. Der Prozess startet mit der Aktualisierung eines dreidimensionalen CAD-Modells und endet in einer Spannungsanalyse der Verdichterblisk an drei verschiedenen Belastungszuständen - Start, Steigen und Reiseflug. Für alle strukturmechanischen Analysen innerhalb der MCS wurde jede variierte Geometrie neu vernetzt, um die optimale Netzqualität für die FE-Analyse zu garantieren. Die Ergebnisse der FE-Analyse wurden anschließend auf ein immer gleichbleibendes Auswertungsnetz übertragen. Nach Abschluss der MCS wurden an den Knoten des Auswertungsnetzes statistische Werte berechnet und visualisiert. Ebenfalls wurden die Daten aller Knoten für die Erstellung von Metamodellen verwendet und darauf basierend eine Entwurfsempfehlung bezüglich der Zielgrößen, Bauteilspannungen und -masse gegeben.

Die Veröffentlichung beginnt in Abschnitt 2 mit der Beschreibung des Metamodellframeworks und des -selektionsprozesses. Anschließend wird das Framework in Abschnitt 3 an mathematischen Testfunktionen validiert. Im Anschluss werden die Prozesskette und das FE-Modell der Verdichterblisk in Abschnitt 4 erläutert. Daraufhin beschreibt Abschnitt 5 die Randbedingungen für die MCS sowie die Datenverwaltung. In Abschnitt 6 wird das Nominaldesign der Verdichterblisk und der Einfluss von Fertigungstoleranzen analysiert und anschließend auf Basis der geometrischen Entwurfsgrenzen die Systemsensitivitäten und ein verbesserter Entwurf vorgestellt. Abschließend wird in Abschnitt 7 die Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick gegeben.

2. METAMODELLE

Die Hauptaufgabe von Metamodellen ist es, einen gegebenen Modelldatensatz, bestehend aus Eingangsgrößen \mathbf{X} und Ausgangsgrößen \mathbf{y} (siehe Abbildung 1), bestmöglich zu approximieren und somit Informationen zu extrahieren bzw. ein bestimmtes Verhalten zu prognostizieren.



BILD 1: Modelldatensatz bestehend aus Eingangsgrößen \mathbf{X} und Ausgangsgrößen \mathbf{y}

Im nachfolgenden Abschnitt werden zunächst die hier verwendeten Metamodellverfahren und der Selektionsprozess vorgestellt.

2.1. Metamodellframework

Das hier vorgestellte Metamodellframework besteht aus 4 Approximationsverfahren: Polynom-Regression LS, MLS, LASSO und RBF. Zusätzlich sind alle Verfahren mit einer Variablenreduktionstechnik (Vorwärtsselktion) verknüpfbar.

Die Auswahl der Techniken orientierte sich an folgenden Anforderungen:

- Approximation von stark nichtlinearem Systemverhalten (RBF, MLS),
- Approximation von Systemen mit kleinem *svr* (LS, LASSO, Variablenreduktion),
- numerisches Rauschen in den Daten (Regressionstechniken).

2.1.1. Polynom-Regression - LS

Innerhalb der linearen Regression wird die Ausgangsgröße *y* als Summe einer Ansatzfunktion $f(x_1, \dots, x_{n_k})$ und einem Fehlerterm ϵ betrachtet. Durch Substitution kann die Ansatzfunktion in einen beliebigen Polynomansatz \mathbf{Bc} überführt werden und ist somit von den Werten der Eingangsgrößen und der verwendeten Polynomordnung *p* abhängig. Die unbekanntenen Koeffizienten *c* des Polynomansatzes werden über die Minimierung des quadratischen Fehlerterms bestimmt.

$$(1) \quad \epsilon^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{Bc})^2 \rightarrow \min.$$

Dies kann über den Schätzer der kleinsten Fehlerquadrate (LS) erfolgen

$$(2) \quad \mathbf{c} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$

2.1.2. Least Absolute Shrinkage and Selection Operator

Das LASSO-Verfahren basiert auf dem LS-Verfahren, wobei das Minimierungsproblem um einen Regularisierungsterm erweitert wird. Dieser Term besteht aus der Summe aller absoluten Koeffizienten und einem Wichtungsterm λ , welcher den Einfluss des Regularisierungsterms steuert. Wenn λ zu Null gesetzt wird, erhält man den Schätzer der kleinsten Fehlerquadrate.

$$(3) \quad (\mathbf{y} - \mathbf{Bc})^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n_c} |c_j| \rightarrow \min$$

Für die Minimierung des Gleichungssystems (3) können die Löser

- coordinate decent,
- least angle regression oder
- alternating direction method of multipliers (ADMM)

verwendet werden. Für diese Veröffentlichung wurde der ADMM-Algorithmus verwendet. Der Hauptvorteil des LASSO-Verfahrens ist, dass unwichtige Koeffizienten des Polynomansatzes exakt zu Null gesetzt werden. Dies entspricht gewissermaßen einer internen Variablenreduktion.

2.1.3. Weighted Least Squares und Moving Least Squares

Weighted Least Squares (WLS) ist eine lokale Regressionsmethode, welche auf lokalen Polynomen basiert. Der Ort des lokalen Polynoms wird über die Vorgabe eines gewünschten Approximationspunktes \hat{x} definiert. Die

gegebenen Datenpunkte \mathbf{X} , *y*, welche in der Nähe von \hat{x} liegen, erhalten eine hohe Wichtung und weit entfernte Datenpunkte eine niedrige Wichtung. Die Entfernung zwischen zwei Punkten wird in dieser Veröffentlichung über die gewichtete euklidische Distanz

$$(4) \quad d_{\theta_{i,j}} = \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{n_k} ((x_{il} - x_{jl})\theta_l)^2 \right)}$$

bestimmt. Das θ stellt dabei die Wichtung für jede einzelne Variable bereit. Die dazugehörige Wichtung wird über

$$(5) \quad w_i(d_\theta) = e^{-d_\theta^2}$$

bestimmt. Für die Bestimmung der Koeffizienten des lokalen Polynoms wird Gleichung (2) mit einer Wichtungsmatrix $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, w_i, \dots, w_{n_{sim}})$ erweitert.

$$(6) \quad \mathbf{c} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$$

Das MLS-Verfahren ist lediglich eine wiederholende Anwendung des WLS-Verfahrens. Die Anzahl an Wiederholungen richtet sich dabei nach der Anzahl gewünschter Approximationspunkte $\hat{\mathbf{X}}$.

2.1.4. Radiale Basisfunktionen

Innerhalb des RBF-Verfahrens wird die Ausgangsgröße *y* über eine Linearkombination von radialen Basisfunktionen $\varphi(d_\theta)$ ausgedrückt. Die Matrix der radialen Basisfunktionen Φ basiert auf der Distanzmatrix von \mathbf{X} .

$$(7) \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{c}$$

$$\text{mit } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi(d_{\theta_{1,1}}) & \dots & \varphi(d_{\theta_{1,n_{sim}}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(d_{\theta_{n_{sim},1}}) & \dots & \varphi(d_{\theta_{n_{sim},n_{sim}}}) \end{pmatrix}$$

Als Basisfunktion wird die Multiquadric RBF

$$(8) \quad \varphi(d_{\theta_{i,j}}) = \sqrt{1 + d_{\theta_{i,j}}^2}$$

verwendet, wobei Gleichung (4) wiederum als Distanzmaß dient. Die unbekanntenen Koeffizienten *c* werden mit

$$(9) \quad \mathbf{c} = \Phi^{-1} \mathbf{y}$$

bestimmt.

2.1.5. Best-Subset-Regression mittels Vorwärtsselektion

Bei diesem Verfahren werden die Eingangsvariablen nacheinander dem Regressionsmodell hinzugefügt. Die Variable, welche ein definiertes Fehlerkriterium am stärksten reduziert, wird dem Regressionsmodell dauerhaft hinzugefügt. Dieser Prozess wird wiederholt, bis eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllt ist:

- alle Variablen sind im Regressionsmodell enthalten,
- die Anzahl an Polynomkoeffizienten ist gleich der Anzahl an Realisierungen oder
- das Fehlerkriterium steigt nach einer Variablenhinzugabe wieder an.

Das in dieser Untersuchung verwendete Regressionsmodell basiert auf einem Polynom dritter Ordnung. Mehr Informationen über Best-Subset-Regression finden sich in [4].

2.2. Selektionsprozess des besten Metamodells

Der Selektionsprozess teilt sich in zwei Schritte auf. Im ersten Schritt werden unter Verwendung eines einfachen kfold-Kreuzvalidierung Gütekriteriums (KCV) die internen Parameter der jeweiligen Metamodellart eingestellt. Im zweiten Schritt wird über das wiederholende kfold-Kreuzvalidierung Gütekriterium (RKCV) das beste Metamodell selektiert. Informationen zu den verwendeten Kriterien finden sich z.B. in [5].

2.2.1. Interner Tuningprozess

Für die Polynom-Regression werden Polynome mit verschiedener Polynomordnung getestet

- $1 \leq p \leq 5$
- $1 \leq p_{\text{Interaktionsterme}} \leq 3$

und der beste Polynomansatz selektiert. Beim Lasso-Verfahren wird ebenfalls die Polynomordnung wie folgt

- $1 \leq p \leq 3$
- $1 \leq p_{\text{Interaktionsterme}} \leq 2$

variiert und zusätzlich innerhalb jeder verwendeten Polynomordnung der Wichtungsterm λ optimiert. Die sich daraus ergebende beste Polynomordnung wird ebenfalls selektiert. Beim MLS- und RBF-Verfahren werden die Hyperparameter θ innerhalb des Distanzmaßes (4) anhand eines Gütekriteriums optimiert. Als Optimierer wurde der Downhill Simplex Algorithmus verwendet [6].

2.2.2. Selektion der besten Metamodellart

Nach den internen Tuningprozessen wurden die in Tabelle 1 zusammengefassten Metamodelle erstellt und das Metamodell mit dem besten RKCV-Kriterium selektiert.

3. VALIDIERUNG DES METAMODELLFRAMEWORKS AN MATHEMATISCHEN TESTFUNKTIONEN

Vor der Anwendung auf eine ingenieurtechnische Problemstellung wurde das Framework an 25550 Datensätzen validiert. Diese Datensätze entstammen 70 mathematischen Testfunktionen. Abhängig von der Variablenanzahl der Testfunktion ($\text{Variablenanzahl} + 20 > n_{sim}$) wurden verschieden große MCS ($n_{sim} = \{30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 150\}$) pro Testfunktion durchgeführt. Die Zufallszahlen wurden mit einem optimierten Latin-Hypercube-Sampling bereitgestellt, daher wurde jede Testfunktion- n_{sim} -Konfiguration 50 mal wiederholt, was insgesamt 25550 verschiedene Datensätze ergibt. Weitere Informationen zu den verwendeten Testfunktionen kann in [7] nachgelesen werden. Zu jedem der 70 Testfunktionen existiert ein Benchmark-Datensatz (X_{Bench}, y_{Bench}) von 1000 Computersimulationen, dieser wird basierend auf dem jeweiligen Datensatz und allen verwendeten Metamodellarten approximiert. Auf Basis der deterministischen Lösung des Benchmark-Datensatzes (y_{Bench}) und der approximierten Lösung (\hat{y}_{Bench}) wird das Bestimmtheitsmaß ($R^2(y_{bench}, \hat{y}_{Bench})$) für alle Metamodellverfahren berechnet und in Abbildung 2 über svr dargestellt. Abbildung 2 zeigt das Konvergenzverhalten gegen $R^2 = 1$ mit

LS	Polynom mit „bester“ Polynomordnung
LS_{reduce}	Polynom mit „bester“ Polynomordnung und Variablenreduktion
$LASSO$	mit „bester“ Polynomordnung und optimierten Wichtungsterm λ
$LASSO_{reduce}$	mit „bester“ Polynomordnung, optimierten Wichtungsterm λ und Variablenreduktion
MLS^1	Approximation mit Polynom 1. Ordnung und optimierten Wichtungsterm θ
MLS^1_{reduce}	Approximation mit Polynom 1. Ordnung, optimierten Wichtungsterm θ und Variablenreduktion
MLS^2_{reduce}	Approximation mit Polynom 2. Ordnung ohne Interaktionsterme, optimierten Wichtungsterm θ und Variablenreduktion
MLS^3_{reduce}	Approximation mit Polynom 3. Ordnung ohne Interaktionsterme, optimierten Wichtungsterm θ und Variablenreduktion
RBF	mit optimierten Wichtungsterm θ
RBF_{reduce}	mit optimierten Wichtungsterm θ und Variablenreduktion

TAB 1: erstellte Metamodelle

steigenden svr -Werten insbesondere für die Verfahren MLS und RBF. Kein Metamodellverfahren kann sich hinsichtlich der Approximationsfähigkeiten von den anderen abgrenzen. Lediglich fällt auf, dass das LASSO-Verfahren bei niedrigen und die MLS und RBF-Verfahren bei hohen svr -Werten ihre Vorteile ausschöpfen können. Wenn für alle Datensätze das Metamodell mit dem höchsten R^2 -Benchmark-Kriterium ausgewählt wird, kann die Performance des Metamodellframeworks abgelesen werden, siehe Abbildung 3a. Hervorzuheben ist hierbei, dass alle Metamodelltypen Anwendung finden, wobei eine Einstufung der Modelle in ihr bevorzugtes Aufgabengebiet schwierig erscheint. Die prozentuale Pie-Chart-Darstellung zeigt, dass das LASSO-Verfahren am häufigsten als bestes

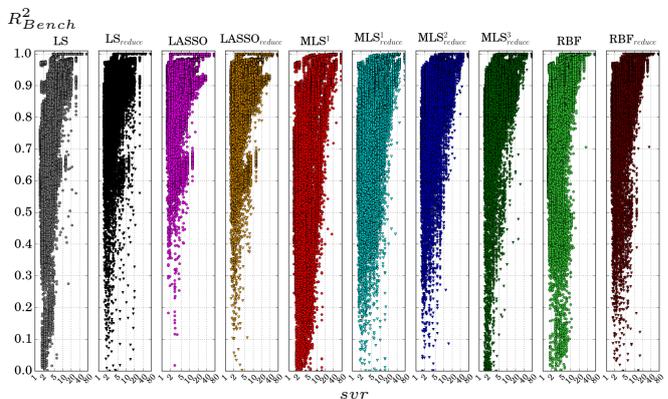


BILD 2: R^2 -Benchmark-Kriterium für alle Metamodellverfahren, angewandt auf 25550 Datensätze

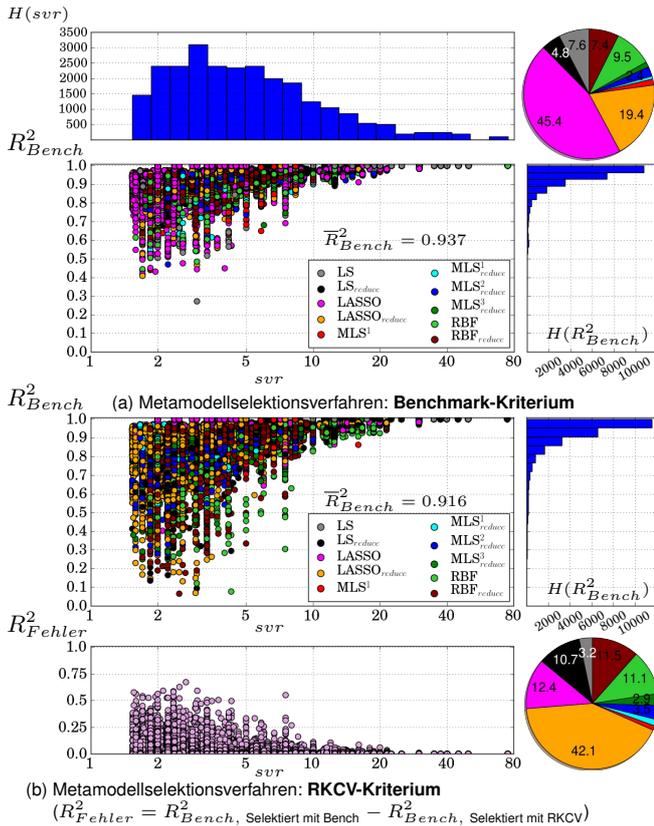


BILD 3: R^2 -Benchmark-Kriterium des besten Metamodell, angewandt auf 25550 Datensätze

Metamodell selektiert wurde. Dies resultiert ggf. aus der speziellen Anwendung im Bereich kleiner svr -Werte. Das arithmetische Mittel des R^2 -Benchmark-Kriteriums für alle 25550 Datensätze liegt bei $\bar{R}^2 = 0.937$ und beschreibt die wahre Performance des Metamodellframeworks. Bisher wurde das Benchmark-Kriterium verwendet, um das beste Metamodell zu selektieren. In der nachfolgenden Diskussion findet die Selektion des besten Metamodells mit dem bereits angesprochenen RKCV-Kriterium statt. Trotzdem wird für die Vergleichbarkeit der Ergebnisse in Abbildung 3b das Benchmark-Kriterium aufgetragen, welches für das selektierte Metamodell herauskommen würde. Infolge des geänderten Selektionsverfahrens sinkt die Performance des Metamodellframeworks von $\bar{R}^2 = 0.937$ auf $\bar{R}^2 = 0.916$. Abbildung 3b zeigt deutliche Unterschiede in der Metamodellauswahl, dies ist einerseits in der Farbinformation des mittleren Graphen als auch in der Pie-Chart-Auswertung zu sehen. Die Auftragung des Fehlers (R^2_{Fehler}) zwischen den verwendeten Selektionsmethoden zeigt bei kleinen svr -Werten eine deutlich höhere Abweichung als bei hohen svr -Werten.

4. BLISK-MODELL

Das hier untersuchte Bauteil stellt eine Verdichterscheibe eines modernen Hochdruckverdichters dar, wobei die Laufschaufeln in integraler Bauweise mit der Scheibe verbunden sind (Blisk), siehe Bild 4a.

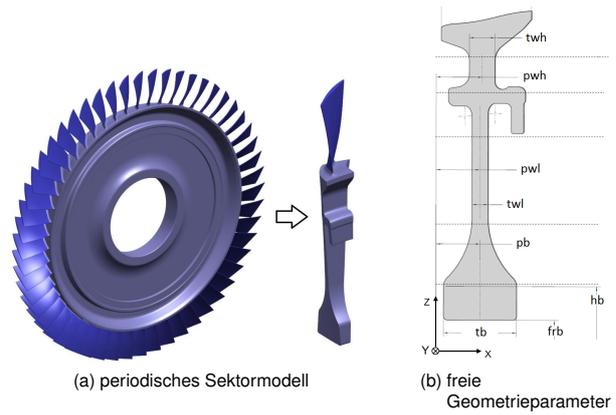


BILD 4: Blisk-Modell

4.1. Prozesskette

Das Bauteil ist innerhalb des kommerziellen CAD-Systems NX(Siemens) parametrisch aufgebaut. Für die Geometrievariation werden 8 Hauptparameter der Scheibe berücksichtigt, siehe Abbildung 4b. Die automatische Parametervariation erfolgt über die NXOpen-Schnittstelle des CAD-Programms. Anschließend wird ein periodisches Sektormodell der Blisk (siehe Abbildung 4a) in Altair Hypermesh automatisch vernetzt und Knotensets für die Randbedingungen gebildet. Nach der Aufprägung einer Lastfall spezifischen Temperaturverteilung und Drehzahl wird das statische Spannungsfeld mit dem FE-Programm CalculiX gelöst. Hierbei werden die drei Lastfälle: Start, Steigen und Reiseflug nacheinander berechnet. Innerhalb der Veröffentlichung wird sich auf die Auswertung der höchsten Hauptspannung konzentriert.

4.2. Erweiterung der Prozesskette für variierende Geometrien

Für die statistische Auswertung der Spannungen an topologisch gleichen Bauteilorten bei variiert Geometrie existiert neben dem Berechnungsnetz ein in der Knotentopologie gleichbleibendes Auswertungsnetz. Durch das Morphen des Auswertungsnetzes auf die variierte Bauteilgeometrie kann die Spannungsinformation auf ein Netz mit gleichen Knotenbezeichnungen und gleicher Elementkonnektivität übertragen werden. Für eine detaillierte Beschreibung siehe [8]. Die belastungsspezifischen Temperaturverteilungen für die FE-Analyse liegen lediglich für die Basisgeometrie vor und werden ebenfalls über das beschriebene Auswertungsnetz auf die variierte Geometrie übertragen.

4.3. FE-Modell

Für die Ausführung der FE-Analyse wurde ein Sektorstück der Scheibe berücksichtigt, welches mit ca. 600000 Knoten und C3D10 Tetraeder-Elementen aufgelöst ist. Auf das Bauteil wirken folgende Randbedingungen:

- Zwangsbedingungen in axialer- und Umfangsrichtung am Flansch,
- periodische Randbedingung an den periodischen Flächen des Scheibensektors,
- 3 Drehzahlen für die Lastfälle: Start, Steigen und Reiseflug,

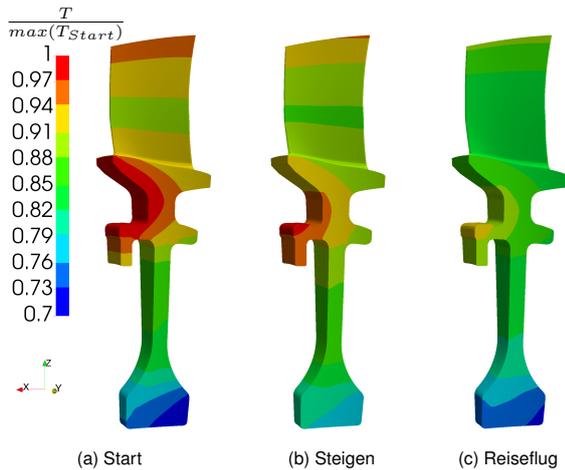


BILD 5: Temperaturverteilung für verschiedene Belastungen normiert mit der maximalen Temperatur unter Startbedingung

- 3 Temperaturverteilungen für die Lastfälle: Start, Steigen und Reiseflug siehe Abbildung 5,

Zusätzlich wurde eine plastische Materialmodellierung des Werkstoffs Ti6246 angewandt.

5. SPANNBREITEN, VERSUCHSPLAN UND DATENVERWALTUNG

Innerhalb der hier exemplarisch durchgeführten Auslegung werden zwei Spannbreiten für die 8 Geometrieparameter der Scheibe nach Tabelle 2 bereitgestellt. Die Entwurfsspannbreiten stellen dabei den möglichen Entwurfsraum dar und die Robustheitsspannbreiten repräsentieren exemplarische Fertigungstoleranzen. Alle Parameter werden für diese Veröffentlichung gleichverteilt und unkorreliert angenommen. Der Versuchsplan wird bereitgestellt über ein Latin-Hypercube-Sampling, wobei die Korrelationseinstellung über einen iterativen Restricted-Pairing-Algorithmus umgesetzt ist. Die maximale absolute Abweichung von einer vorher definierten Korrelationsmatrix wird hierbei als Abbruchkriterium verwendet. Mit den bis hier vorgestellten Prozessketten, Verfahren und Randbedingungen wurden folgende zwei Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt.

- MCS1 - Robustheitsanalyse mit Spannbreite 2, 40 Simulationen
- MCS2 - Sensitivitätsanalyse und Systemverbesserung mit Spannbreite 1, 80 Simulationen

Name	Entwurf (1)	Robustheit (2)
pb	4 mm	0.4 mm
pwh	3 mm	0.4 mm
pwl	3 mm	0.4 mm
tb	8 mm	0.4 mm
twh	4 mm	0.4 mm
twl	3.5 mm	0.2 mm
frb	8 mm	0.6 mm
hb	4 mm	0.6 mm

TAB 2: Spannbreiten der geometrischen Parameter

Diese Analysen bilden die Datenbasis für die nachfolgenden Sensitivitätsanalysen und Designempfehlungen.

Die Datenmenge, welche sich aus den hier vorgestellten Monte-Carlo-Simulationen ergibt, setzt sich aus folgenden Eigenschaften zusammen.

- 2 MCS
- 3 Belastungsfälle
- 10476 Knoten des Auswertungsnetzes
- Anzahl an Simulationen (40, 80)
- eine Ergebnisgröße (höchste Hauptspannung)

Für die Verwaltung und effiziente Auswertung aller MCS wurden alle Daten in eine HDF5-Datei geschrieben. Das HDF5-Format ist geeignet für die Speicherung großer Datenmengen und wurde vom National Center for Supercomputing Applications (NCSA) entwickelt. Folgende Vorteile entstehen durch die Verwendung:

- Datenmenge liegt hierarchisch geordnet in einer Datei,
- effiziente Dateizugriffe auf homogene Daten mit den Programmiersprachen Python und C++ und
- die Möglichkeit der Abspeicherung von Metadaten.

6. ERGEBNISSE

Die exemplarische Auslegung der Blisk-Scheibengeometrie bei möglichst kleinen Spannungen und kleiner Bauteilmasse wird in der vorliegenden Veröffentlichung als typisches Anwendungsbeispiel fokussiert. Neben der Designempfehlung steht die Darlegung verschiedenster Designkonfigurationen und des Systemverhaltens im Vordergrund. Je nach Anforderung kann sehr effizient ein geeigneter Entwurf gefunden und selektiert werden. Die folgende Ergebnisauswertung konzentriert sich dabei auf die Scheibengeometrie wobei das Schaufelblatt und die äußere Flanschfläche vernachlässigt werden. Im ersten Unterabschnitt werden hierfür das Nominaldesign und die Auswirkungen der geometrischen Robustheitsstrebungen analysiert. Der zweite und dritte Unterabschnitt behandelt die Systemanalyse mit Designstrebungen, dabei wird das System zunächst nach deren Einflussgrößen analysiert und anschließend die angesprochene Darlegung von Designkonfiguration auf Basis von Metamodellen behandelt. Für die nachfolgenden Abbildungen wird folgende Normierung eingeführt:

$$(10) \sigma_{norm} = \frac{\text{höchste Hauptspannung}}{\text{max. höchste Hauptspannung (Start, Ausgangsdesign)}}$$

6.1. Nominaldesign und Robustheitsanalyse basierend auf MCS1

Aufgrund von Zugbelastungen treten die höchsten Hauptspannungen im Nabenbereich der Scheibe (A, B, C) auf. Ebenfalls sind hohe Spannungen am Steg (D) und an den Radien zum Flansch (E, F) zu erkennen, siehe Abbildung 6a. Abbildung 6b zeigt die relativen Häufigkeiten aus der Robustheitsanalyse, dabei wird die Häufigkeit eines definierten Grenzwertes innerhalb der 120 Ereignisse ausgewertet, welche sich aus den drei Flugzuständen und 40 Realisierungen (MCS1) ergeben. Die bereits selektierten Orte mit hoher Spannung, bestätigen sich durch diese Betrachtung. Weiterhin zeigt die Auswertung der Robustheitsanalyse an

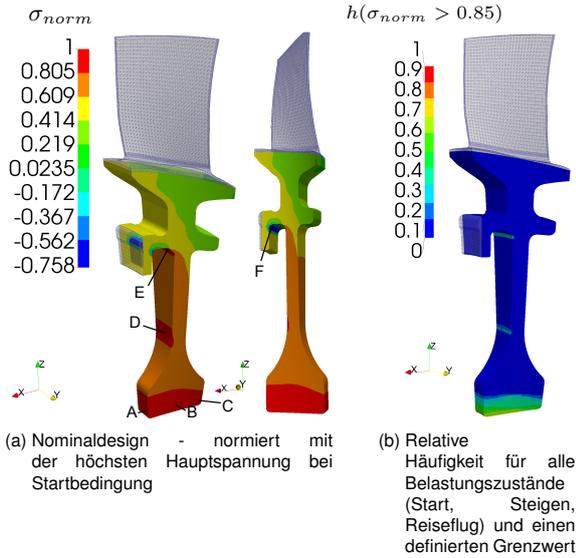


BILD 6: Orte (A-F) hoher Spannungswerte

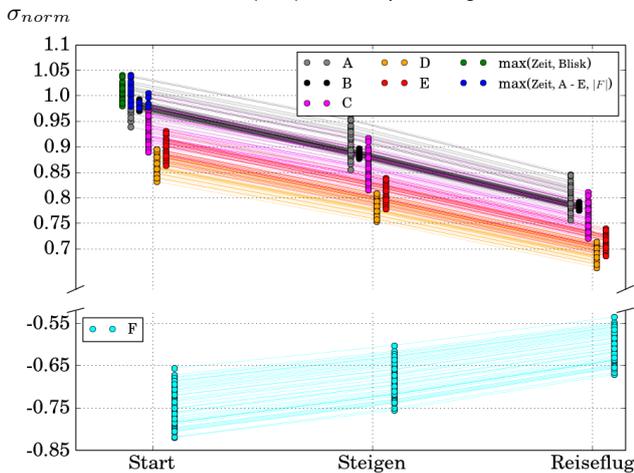


BILD 7: höchste Hauptspannung über die betrachteten Flugzustände an verschiedenen kritischen Orten

ausgewählten Orten, siehe Abbildung 7, dass die höchsten Hauptspannungen stark von dem Flugzustand abhängen. Die Auswirkungen der geometrischen Robustheitsstreuweiten sind dabei in jedem Flugzustand dieselben, dies ist an den parallel verschobenen Verbindungslinien zu erkennen, welche die Realisierungen der MCS1 darstellen. Die maximal auftretende höchsten Hauptspannung innerhalb der betrachteten Orte A, B, C, D, E, |F| und Flugzustände (Start, Steigen, Reiseflug) sind blau eingefärbt. Es zeigt sich, dass das Auftreten der maximalen Belastung sich lediglich auf den Startvorgang beschränkt, sich der Bauteilort aber ändern kann.

6.2. Sensitivitäten und Spannungsvariation basierend auf MCS2

Abbildung 8 zeigt den Spearman-Korrelationskoeffizienten zwischen verschiedenen Eingangsgrößen und der höchsten Hauptspannung unter Startbedingungen. Aufgrund der Schwerpunktachsenverschiebung durch die Versatzparameter (pb, pwl, pwh) entstehen entgegengesetzte Korrelationen an Vorder- und Rückseite der Scheibe. Die Dickenparameter

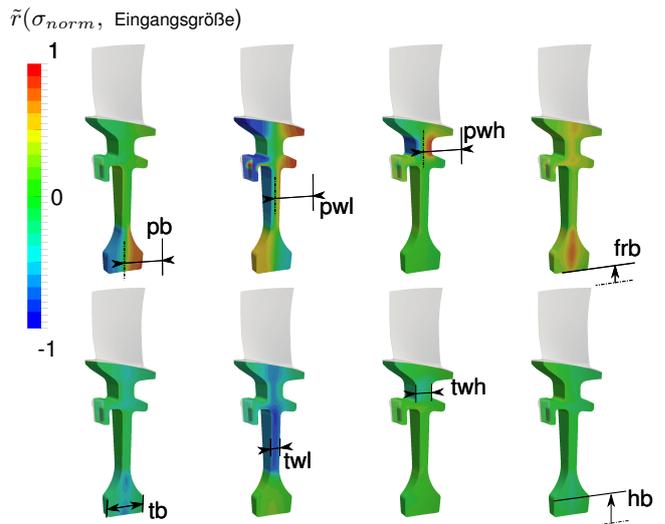


BILD 8: Spearman-Korrelationskoeffizient zwischen der höchsten Hauptspannung unter Startbedingung und allen Eingangsgrößen

(tb, twl, twh) besitzen eine negative Korrelation, was eine Spannungserhöhung bei schmäler werdender Scheibe entspricht. Hingegen besitzt der Abstand zwischen Nabe und Rotationsachse (frb) eine positive Korrelation auf das Nabenzentrum. Abbildung 9 zeigt die Differenz aus Maximal- und Minimalwert der höchsten Hauptspannung unter Startbedingung innerhalb der MCS2. Hohe Differenzen ergeben sich insbesondere in den Radien im Flanschbereich. Ebenso besitzt die Vorder- und Rückseite der Scheibennabe eine hohe Spannungsvariation infolge der geometrischen Veränderungen. Innerhalb des Flanschbereiches wurden zwei Regionen ausgewählt, um die hohe Streubreite zu beschreiben. Hierfür wurden zwei Knoten des Auswertungsnetzes (grün und blau) ausgewertet und die absolute Häufigkeit der höchsten Hauptspannung zusätzlich in Abbildung 9 aufgetragen. Ersichtlich wird, dass beide Regionen innerhalb der MCS2 zwischen Zug- und Druckbelastung wechseln. Dieser Belastungswechsel ist un stetig, wobei am grünen Knoten häufiger eine Druckbelastung und am blauen Knoten häufiger eine Zugbelastung vorherrscht. Ein Vergleich mit Abbildung 8 zeigt, dass dieser Effekt durch den pwl-Parameter beeinflusst wird, wobei der grüne Knoten positiv und der blaue Knoten negativ mit der höchsten Hauptspannung korrelieren.

6.3. Auswertung basierend auf Metamodellen und MCS2

Im ersten Teil dieses Abschnitts wird unter Verwendung des am besten geeigneten Metamodells der Sobol-Totaleffekt nach Saltelli [9] an zwei ausgewählten Knoten des Auswertungsnetzes berechnet und mit den Sensitivitätsmaßen Spearman-Korrelation und Distanzkorrelation [10] verglichen. Im zweiten Teil wird die im Abschnitt 2 beschriebene Metamodellgenerierung auf alle Knoten des Auswertungsnetzes angewandt und für das Finden eines verbesserten Designs verwendet.

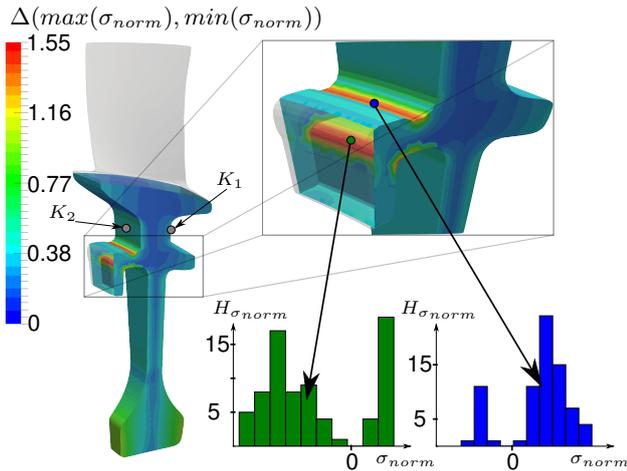


BILD 9: Differenz zwischen maximaler und minimaler höchster Hauptspannung unter Startbedingung innerhalb der MCS2 an jedem Knoten des Auswertungsnetzes

	Spearman	Distanz	Sobol
$\sigma_{norm}(K_1)$	0.89	0.87	0.81
$\sigma_{norm}(K_2)$	-0.8	0.75	0.81
$\max(\sigma_{norm}(K_1), \sigma_{norm}(K_2))$	-0.1	0.3	0.51

TAB 3: Vergleich verschiedener Sensitivitätsmaße zwischen der höchsten Hauptspannung und dem pwh-Parameter

6.3.1. Vergleich verschiedener Sensitivitätsmaße an exemplarisch selektierten Orten

Für die exemplarische Auswertung werden zwei Knoten aus dem oberen Stegbereich an Vorder- und Rückseite der Blik entnommen, welche mit K_1 und K_2 in Abbildung 9 gekennzeichnet sind. Innerhalb dieser Region ist der pwh-Geometrieparameter für eine Änderung der höchsten Hauptspannung maßgeblich, siehe Abb. 8. Zusätzlich wird aus den zwei betrachteten Orten der maximale Spannungswert ausgewertet, siehe Abbildung 10.

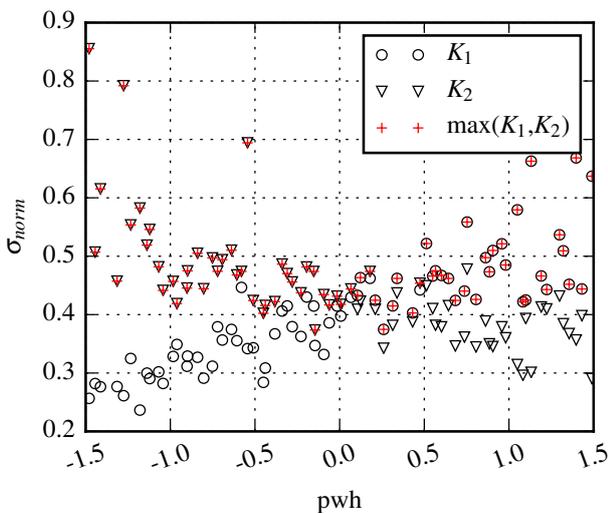


BILD 10: höchste Hauptspannung unter Startbedingung über pwh-Parameter an K_1 , K_2 und $\max(K_1, K_2)$

Die Sensitivitätsmaße zwischen den drei beschriebenen Spannungen und dem pwh-Geometrieparameter sind in Tabelle 3 zusammengetragen. Die Metamodelle zur Berechnung des Sobol-Totaleffekts besitzen hierbei eine sehr gute Prognosefähigkeit. Folgende Kernaussagen ergeben sich bei der Auswertung von Tabelle 3:

- Die monotonen Zusammenhänge beurteilen alle Maße betragsmäßig annähernd gleich.
- Der Spearman-Korrelationskoeffizient ist ein Vorzeichen behaftetes Maß und kann somit die Richtung der Korrelation angeben.
- Die nichtmonotonen Zusammenhänge werden lediglich von der Distanzkorrelation und dem Sobol-Totaleffekt nach Saltelli erfasst.

6.3.2. Konstruktion eines globalen Metamodells

Für eine effiziente Nutzung der erzeugten Daten aus MCS2 werden an allen 10476 Knoten des Auswertungsnetzes Metamodelle für die Zielgrößen

- x-Knotencoordinate
- y-Knotencoordinate
- z-Knotencoordinate
- σ - höchste Hauptspannung unter Startbedingungen

berechnet. Grundsätzlich kann es dazu kommen, dass an jedem Knoten ein anderes Verfahren als bestes Metamodell bewertet wird. Entsprechend würden an allen Knoten verschiedene Metamodellparameter vorliegen. Um diesen Verwaltungsaufwand zu vermeiden, wird das beste Metamodell mit einem Polynom höherer Ordnung nachgebildet. Durch die Berechnung eines Polynom-Metamodells vom besten Metamodell können an jedem Knoten die gleichen Metamodellparameter (Polynomkoeffizienten) gespeichert und der Berechnungsprozess für eine neue Realisierung stark beschleunigt werden. Für die Umsetzung wurde mit der besten Metamodelltechnik eine Stichprobe aus den Entwurfsspannbreiten (Tabelle 2) von 10000 Realisierungen approximiert. Die resultierenden Daten $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{10000 \times n_k}$, $\mathbf{Y}_{\text{Approx}} \in \mathbb{R}^{10000 \times 1}$ werden genutzt, um ein Polynom mit identischer Polynomordnung an jedem der 10476 Knoten zu erstellen. Basierend auf der hier verwendeten Variablenanzahl ($n_k = 8$) und der Polynomordnung ($p = 6$, $p_{\text{Interaktionsterme}} = 3$) entsteht eine feste Koeffizientenanzahl von 189 Koeffizienten. Die Koeffizienten werden für jede Zielgröße und an allen Knoten berechnet und als Matrizen ($\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_y, \mathbf{C}_z, \mathbf{C}_\sigma \in \mathbb{R}^{189 \times 10476}$) im HDF5-Format gespeichert. Nachdem eine gewünschte Stichprobe $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sim}} \times n_k}$ in den verwendeten Polynomansatz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sim}} \times 189}$ überführt wurde, lassen sich jeweils mit einer Matrizenmultiplikation

$$(11) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{BC}$$

die einzelnen Zielgrößen ($\mathbf{Y}_x, \mathbf{Y}_y, \mathbf{Y}_z, \mathbf{Y}_\sigma \in \mathbb{R}^{n_{\text{sim}} \times 10476}$) an allen Knoten berechnen. Zusätzlich zu den benannten Zielgrößen wird ein einzelnes Metamodell für die Masse des Bauteils erstellt. Hierbei konnte mit einem Polynom 1. Ordnung eine sehr gute Prognosefähigkeit erreicht werden.

Die Güte der Metamodelle für die höchste Hauptspannung an allen Knoten des Auswertungsnetzes kann in

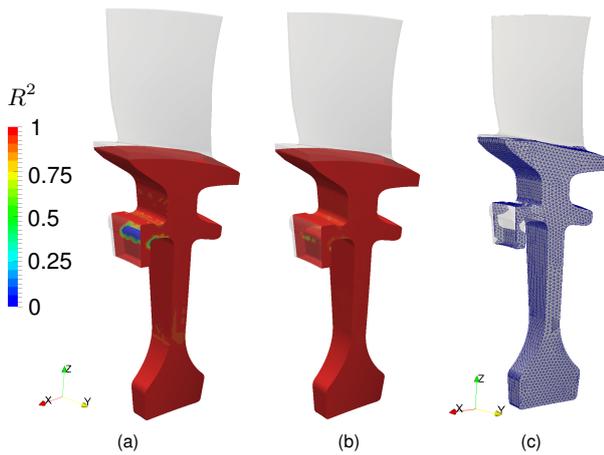


BILD 11: (a) R²-Bestimmtheitsmaß des besten Metamodells für die höchste Hauptspannung (b) Bestimmtheitsmaß des Polynom-Metamodells vom besten Metamodell (c) Knoten mit einem R²-Bestimmtheitsmaß ≥ 0.925

Abbildung 11 eingesehen werden. Hierfür wird zunächst das R²-Bestimmtheitsmaß in Abbildung 11a ausgewertet. Erkennbar sind größtenteils hohe Bestimmtheitsmaße, was für eine hohe Prognosefähigkeit spricht. Metamodelle mit einer sehr schlechten Prognosefähigkeit liegen z.B. im unteren Radius des Flanschbereiches. Das Versagen aller Metamodellearten in dieser Region ist mit dem dort vorliegenden un stetigen Systemverhalten zu erklären, siehe Abbildung 9. In Abbildung 11b ist das Bestimmtheitsmaß des Polynom-Metamodells vom besten Metamodell aufgetragen, erkennbar ist eine hohe Prognosefähigkeit. Folglich ist der Fehler durch den beschriebenen Ansatz sehr gering bzw. vernachlässigbar. Für die nachfolgenden Betrachtungen werden lediglich die Metamodelle mit einem R²-Bestimmtheitsmaß ≥ 0.925 verwendet, siehe Abbildung 11c. Die Metamodellgüte für die x, y, z-Koordinate wird auf die gleiche Art und Weise ausgewertet. Die Dauer für die globale Metamodellerstellung lag bei mehreren Stunden auf dem hauseigenen Computercluster.

6.3.3. Systemverbesserung

Über den beschriebenen Ansatz können beliebige Eingangsgrößenkombinationen des Entwurfsraumes nachgerechnet und die resultierende geometrische Variation (Metamodelle - x, y, z-Koordinate) und das dazugehörige Spannungsprofil (Metamodell - höchste Hauptspannung) in Echtzeit visualisiert werden, siehe Abbildung 12.

Für die hier durchgeführte exemplarische Systemverbesserung wurde eine Monte-Carlo-Simulationen von 500000 Realisierungen auf den Metamodellen aller Knoten des Auswertungsnetzes und dem Metamodell der Bauteilmasse in wenigen Sekunden berechnet. Aus dieser Datenbasis wurden anschließend die Zielgrößen:

- maximal auftretende höchste Hauptspannung aller betrachteten Knoten des Auswertungsnetzes,
- dazugehörige Bauteilmasse

extrahiert und in Abbildung 13 aufgetragen. Aufgrund der Normierung mit dem Ausgangsdesign, stellen alle

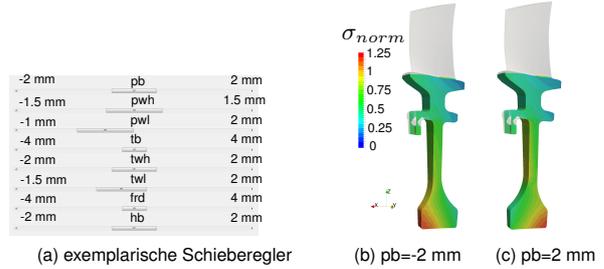


BILD 12: exemplarische Schieberegler Echtzeit 3D-Visualisierung über Schieberegler

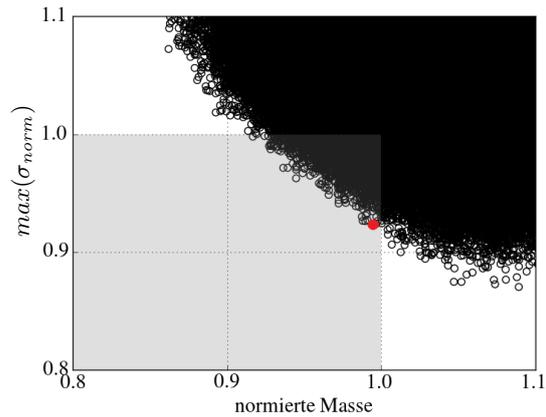


BILD 13: Normierte maximale höchste Hauptspannung im Bauteil über normierte Bauteilmasse

Realisierungen innerhalb des grauen Rechtecks verbesserte Entwürfe hinsichtlich der Zielgrößen dar. Jeder beliebige dort selektierte Entwurf kann wiederum in Gestalt und Spannungsprofil, aufgrund der vorliegenden Metamodelle, dreidimensional visualisiert und auf Plausibilität überprüft werden.

Der visuellen Plausibilitätsprüfung folgt letztendlich die deterministische FE-Analyse des selektierten Entwurfs. Hierfür wurde sich exemplarisch für einen Entwurf entschieden, welcher eine zum Ausgangsentwurf annähernd gleichbleibende Masse vorweist aber die maximale Spannung reduziert ist, siehe rot markierter Punkt in Abbildung 13. Der Vergleich zwischen deterministischer Lösung und metamodellbasierter Approximation anhand von Tabelle 4 und Abbildung 14 zeigt hierbei gute Übereinstimmungen und bestätigt das gefundene Design.

	FE-Analyse	Metamodell
$max(\sigma_{norm})$	0.9199	0.9229
normierte Bauteilmasse	0.9928	0.9944

TAB 4: Vergleich der normierten Zielgrößen zwischen FE-Analyse und Metamodell-Approximation

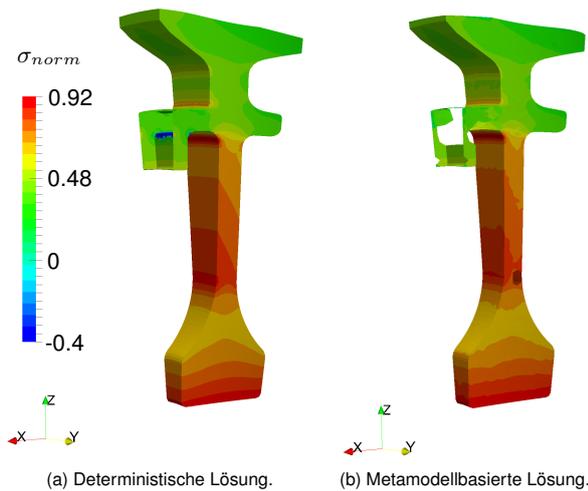


BILD 14: Vergleich der 3D-Visualisierung zwischen FE-Analyse und Metamodell-Approximation

7. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Für die Bereitstellung des bestmöglichen Metamodells wurde in der vorliegenden Veröffentlichung ein Framework aus Metamodellen (Polynom-Regression, LASSO, MLS, RBF) generiert. Das RKCVC-Kriterium wurde für die Selektion des besten Metamodells verwendet. Die Validierung des Frameworks an mathematischen Testfunktionen ergab folgende Aussagen:

- Kein Metamodellverfahren kann sich hinsichtlich der Prognosefähigkeit von den anderen Verfahren abgrenzen.
- Durch den Ansatz des Metamodellframeworks kann die Prognosefähigkeit gegenüber eines einzelnen Metamodellverfahrens verbessert werden.
- Die Auswahl des besten Metamodells ist insbesondere im Bereich kleiner svr -Werte anfällig für Fehlselektionen. Ab einem svr von 10 ist der Fehler vernachlässigbar.

Basierend auf einer MCS mit den Entwurfsspannbreiten ergab sich aus der Sensitivitätsanalyse, dass alle geometrischen Versatzparameter (pb , pwl , pwh) einen entgegengesetzten dominanten Einfluss auf die Spannung an Vorder- und Rückseite der Blisk besitzen. Hingegen dominieren die Dickenparameter (tb , twl , twh) und der Rotationsachsenabstand (frb) die Spannung im Bauteilinneren. Durch die Korrelationsbetrachtung auf dem Bauteil kann der Einflussbereich des jeweiligen Parameters quantifiziert werden. Zusätzlich wurde an einem einzelnen Knoten des Auswertungsnetzes der Einfluss zwischen der normierten höchsten Hauptspannung und des pwh -Versatzparameters über verschiedene Sensitivitätsmaße ausgewertet. Für das metamodellbasierte Sensitivitätsmaß entstanden insbesondere bei der Betrachtung eines nichtmonotonen Systemverhaltens Vorteile gegenüber den anderen Maßen.

Nahezu für jeden Knoten des Auswertungsnetzes konnte ein Metamodell mit hoher Prognosefähigkeit generiert und für das Finden eines verbesserten Designs genutzt werden. Hierbei wurde ein Polynom-Metamodell vom besten Metamodell verwendet. Durch diesen Ansatz entstand die Möglichkeit, geometrische Variationen mit dazugehörigem Spannungsprofil in Echtzeit zu visualisieren.

Eine exemplarische Designverbesserung bestätigte den Prozess.

Zukünftige Arbeiten werden die geometrischen Fertigungstoleranzen mit in den metamodellbasierten Designprozess integrieren und den Erstellungsprozess der Metamodelle weiter beschleunigen.

DANKSAGUNG

Die Untersuchungen wurden im Rahmen des Verbundvorhabens COOREFLEX-Turbo der AG Turbo durchgeführt und mit Mitteln des Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie (BMWi) aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages unter dem Förderkennzeichen 03ET7041E gefördert. Die Autoren danken der AG Turbo, MTU Aero Engines AG, Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG und Ansaldo Energia Switzerland AG für die Unterstützung und die Erlaubnis zur Veröffentlichung. Die Verantwortung für den Inhalt liegt allein bei den Autoren.

LITERATUR

- [1] Wang, G. G., and Shan, S., 2006. Review of metamodeling techniques in support of engineering design optimization.
- [2] Viana, F. A. C., Gogu, C., and Haftka, R. T., 2010. "Making the most out of surrogate models: tricks of the trade".
- [3] Ryberg, A.-B., Domeij Bäckryd, R., and Nilsson, L., 2012. "Metamodel-based multidisciplinary design optimization for automotive applications".
- [4] Friedman, J., Hastie, T., and Tibshirani, R., 2001. *The elements of statistical learning*, Vol. 1. Springer series in statistics Springer, Berlin.
- [5] Refaeilzadeh, P., Tang, L., and Liu, H., 2009. "Cross-validation". In *Encyclopedia of database systems*. Springer, pp. 532–538.
- [6] Kiusalaas, J., 2010. *Numerical methods in engineering with Python*. Cambridge University Press, New York.
- [7] Reuter, I., Voigt, M., Mailach, R., Becker, K.-H., Fischersworing-Bunk, A., Schlums, H., and Ivankovic, M., 2017. "Moving Least Squares Metamodels—Hyperparameter, Variable Reduction and Model Selection". In *14th International Probabilistic Workshop*, R. Caspeele, L. Taerwe, and D. Proske, eds. Springer International Publishing, Cham, pp. 63–80.
- [8] Reuter, I., Weiss, T., Voigt, M., Vogeler, K., Schlums, H., Becker, K.-H., and Fischersworing-Bunk, A., 2013. "Probabilistic Structure-Mechanical Assessment of Rotor Discs Considering Geometry Variations". In *ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, pp. V07AT28A001–V07AT28A001.
- [9] Saltelli, A., ed., 2008. *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley, Chichester, England ; Hoboken, NJ.
- [10] Székely, G. J., Rizzo, M. L., and Bakirov, N. K., 2007. "Measuring and testing dependence by correlation of distances". *The Annals of Statistics*, **35**(6), Dec., pp. 2769–2794.