

# LPV-REGLERENTWURF ZUR BÖENLASTABMINDERUNG AM FLEXIBLEN FLUGZEUG

F. Goßmann M. Pusch

Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 82234 Oberpfaffenhofen,  
Deutschland

## Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die aktive Abminderung von Strukturlasten im Flügel eines Verkehrsflugzeuges untersucht. Um Änderungen von Einflussgrößen im Betrieb zu berücksichtigen, wird das Problem mit Hilfe der Theorie für lineare parametervariante (LPV) Systeme betrachtet. Der Reglerentwurf erfolgt für ein gitterbasiertes LPV-Modell, welches durch eine Linearisierung an verschiedenen Trimpunkten aus einem nichtlinearen Modell mit instationärer Aerodynamik erzeugt wird. Mit Hilfe dieses Modells wird eine von der Flughöhe abhängige Regelung mit Ausgangsrückführung entworfen. Anschließend wird der LPV-Regler in Simulationen im Zeitbereich für unterschiedlichen Flughöhen getestet und so seine Leistungsfähigkeit untersucht. Abschließend wird die Robustheit der Regelung demonstriert, indem die Amplituden- und Phasenreserve ausgewertet wird und Auswirkungen von Änderungen in der Machzahl und Massenverteilung untersucht werden.

## 1 EINLEITUNG

Bei der Entwicklung neuer Verkehrsflugzeuge spielt die Minimierung des Treibstoffverbrauchs eine große Rolle. Einer der größten Einflussfaktoren stellt das Eigengewicht der Struktur dar, welche sämtlichen auftretenden Belastungen standhalten muss. Diese Belastungen umfassen unter anderem einen Flug in atmosphärischer Turbulenz. Die dabei entstehenden strukturellen Lasten können durch den Einsatz eines Regelungssystems effektiv abgemindert werden und bieten somit Potential zur Gewichtsreduktion [1].

Entwicklungen von aktiven Regelungssystemen zur Böenlastabminderung (*gust load alleviation* - GLA) reichen bis in die 70er-Jahre zurück. Eines der ersten Beispiele stellt die 1970 in den Dienst gestellte Lockheed C-5A dar. Hintergrund für die Entwicklung waren Probleme mit Materialermüdung infolge von Biegebelastungen in der Flügelwurzel, welche unter anderem mit einer aktiven Lastabminderung behoben werden konnten [2]. Ein ähnliches System wurde auch bei der Lockheed L-1011-500 Tristar (1976) entwickelt. Um den induzierten Widerstand zu reduzieren, wurde die Flügelspannweite vergrößert. Um einen Anstieg des Gewichtes infolge der erforderlichen Strukturverstär-

kungen zu umgehen, wurde für das Flugzeug ebenfalls ein GLA-System entworfen [3]. Die Entwicklung hat sich bis heute fortgesetzt und so finden sich in nahezu allen aktuellen Flugzeugmodellen wie dem Airbus A340, dem A380 sowie der Boeing 787 Regelungssysteme, die auftretende Böenlasten abmildern und zum anderen auch den Passagierkomfort erhöhen [1].

Aufgrund des Potentials zur Gewichtsreduktion werden regelmäßig neue Regelungsansätze für ein GLA-System untersucht. In [4] wurde am Beispiel einer B-52 gezeigt, dass mit Hilfe von  $H_\infty$ -Reglern Böen-Lasten sehr effizient abgemindert werden können. Ähnliche Resultate wurden auch in [5] am Beispiel einer Saab 340 präsentiert. Auf Basis dieser Regelungsansätze wird in diesem Beitrag ein von der Flughöhe abhängiger Regler entworfen. Ein Nachteil der  $H_\infty$ -Regler ist, dass diese nur für einen bestimmten Betriebspunkt im Flugbereich entworfen werden. Da sich der Betriebspunkt im Flug aufgrund von variierenden Einflussgrößen wie der Luftdichte ändert, besitzt ein über den gesamten Flugbereich konstanter Regler nur eine eingeschränkte Leistungsfähigkeit. Um diese Variationen im Reglerentwurf zu berücksichtigen, wird das Problem mit Hilfe der Theorie für LPV-Systeme betrachtet.

---

F. Goßmann war im Rahmen seiner Masterarbeit am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, DLR tätig, aktuell wiss. Mitarbeiter am Institut für Steuer- und Regelungstechnik, Universität der Bundeswehr München, 85577 Neubiberg. E-Mail: [felix.gossmann@unibw.de](mailto:felix.gossmann@unibw.de)

M. Pusch ist wiss. Mitarbeiter am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, DLR. E-Mail: [manuel.pusch@dlr.de](mailto:manuel.pusch@dlr.de)

In Kapitel 2 werden die für diesen Beitrag erforderlichen Grundlagen von LPV-Systemen und deren Regelung durch Minimierung der induzierten  $L_2$ -Norm erläutert. Im darauf folgenden Kapitel 3 wird die verwendete Modellierung vorgestellt und deren Aufbereitung für den Regler-

entwurf beschrieben. Hierzu gehören neben der Linearisierung und der Vereinfachung des Modells auch die Modellierung des stochastischen Bößenverhaltens. In Kapitel 4 wird der Entwurf einer GLA-Regelung für ein LPV-System gezeigt. Es wird das Regelungsproblem definiert und die darauf aufbauende Regler-Synthese beschrieben. Der entworfene Regler wird anschließend in Kapitel 5 auf seine Leistungsfähigkeit und Robustheit untersucht.

## 2 LPV-SYSTEME

Linear parametervariante Systeme (LPV-Systeme) stellen eine Klasse der linearen Mehrgrößensysteme dar. Deren mathematische Beschreibung ist für ein System mit einem Zustandsvektor  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ , einem Eingangsvektor  $\tilde{u}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\tilde{u}}}$  und einem Ausgangsvektor  $\tilde{y}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\tilde{y}}}$  lautet nach [6]

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix}$$

und kann als Erweiterung von linearen zeitinvarianten Zustandsraummodellen verstanden werden. Das System hängt kontinuierlich von einem stetig differenzierbaren Parametervektor  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$  ab, wobei  $n_p$  die Anzahl der variablen Parameter in  $\rho$  darstellt. Zusätzlich werden die Änderungsraten  $\dot{\rho}(t)$  der Parameter als beschränkt betrachtet. Alle zulässigen Trajektorien von  $\rho(t)$  können deshalb durch die Menge

$$(2) \quad \mathcal{A} = \{ \rho(t) \mid \rho(t) \in \mathcal{P} \wedge \dot{\rho}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}, \\ |\dot{\rho}_i(t)| \leq v_i, \quad i = 1, \dots, n_p, \forall t \in \mathbb{R} \}$$

erfasst werden [6]. Mit  $v_i$  werden die Ratenbeschränkungen für jeden einzelnen Parameter  $i$  des Parametervektors  $\rho(t)$  bezeichnet. Zusätzlich wird  $\rho(t)$  noch auf ein bestimmtes Intervall  $\rho : [\rho_{min}, \rho_{max}]$  begrenzt. Der Zustandsraum in Gleichung (1) setzt sich aus den kontinuierlichen Matrix-Funktionen  $A : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_{\tilde{u}}}$ ,  $C : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\tilde{y}} \times n_x}$  und  $D : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\tilde{y}} \times n_{\tilde{u}}}$  zusammen. Auf die Angabe der Zeitabhängigkeit wird im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Erzeugt werden LPV-Modelle hier durch die Linearisierung eines nichtlinearen Modells in lokal konstanten Arbeitspunkten in Abhängigkeit von  $\rho$  [7]. Die im Folgenden betrachteten Problemstellungen der Modellreduktion (Kapitel 2.1) oder dem Entwurf von Regelungen (Kapitel 2.2) können mit Hilfe von linearen Matrix-Ungleichungen (*linear matrix inequalities* – LMIs) gelöst werden. Da das System aus Gleichung (1) kontinuierlich von  $\rho$  abhängt, sind in diesem Fall unendlich viele LMIs zu Lösung des Problems erforderlich. Ein möglicher Lösungsansatz ist es, das Problem in einer gitterbasierten Form zu beschreiben, wie es auch in [6] und [8] durchgeführt wird. Dabei wird die betrachtete Menge aller Parameter  $\rho$  mit einer finiten Anzahl von Elementen aus  $\mathcal{A}$  angenähert. Das LPV-System wird

also durch eine finite Menge von Zustandsraummodellen für diskrete Werte des Parametervektors  $\rho$  beschrieben, sodass ein Problem mit einer endlichen Dimension entsteht. Es wird allerdings nur eine Approximation des eigentlichen Problems gelöst, weshalb das betrachtete Parametergitter sehr sorgfältig zu wählen ist. Ein sehr feines Gitter erschwert die Lösung deutlich. Es ist daher empfehlenswert, das Problem zunächst auf einem eher groben Gitter zu lösen und das Resultat anschließend auf dessen Gültigkeit auf einem feineren Gitter zu prüfen [6, 8].

### 2.1 Balancierte Modellreduktion

Die balancierte Modellreduktion ist ein numerisches Ordnungsreduktionsverfahren, welches es ermöglicht ein System durch ein ähnliches System mit geringerer Ordnung anzunähern. Hierzu wird das System in eine balancierte Form überführt, welche dadurch charakterisiert ist, dass die beiden als konstant angenommenen Gram'schen Matrizen der Steuerbarkeit ( $P$ ) und Beobachtbarkeit ( $Q$ ) identisch sind und als Diagonalmatrix der Form

$$(3) \quad P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ \text{mit } \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0$$

aufzutreten. Mit  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(QP)}$  werden die Singulärwerte bezeichnet und unter  $\lambda_i(QP)$  wird der  $i$ -te Eigenwert der Matrix  $QP$  verstanden. Durch die Annahme von konstanten Matrizen  $P$  und  $Q$  können beide durch die Lösung von

$$(4) \quad A(\rho)P + PA(\rho)^T + B(\rho)B(\rho)^T < 0,$$

$$(5) \quad A(\rho)^T Q + QA(\rho) + C(\rho)^T C(\rho) < 0$$

ermittelt werden [9]. Eine Balancierung des Systems wird erreicht, indem eine konstante Transformationsmatrix  $T$  ermittelt wird, die das System aus Gleichung (1) in ein balanciertes System der Form

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}A(\rho)T & T^{-1}B(\rho) \\ C(\rho)T & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

überführt.

Das balancierte System aus Gleichung (6) lässt sich nun wie folgt

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{b1} \\ \dot{x}_{b2} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(\rho) & \tilde{A}_{12}(\rho) & \tilde{B}_1(\rho) \\ \tilde{A}_{21}(\rho) & \tilde{A}_{22}(\rho) & \tilde{B}_2(\rho) \\ \tilde{C}_1(\rho) & \tilde{C}_2(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

aufteilen, wobei im Zustandsvektor  $x_{b2}$  die Zustände mit einem geringen Anteil am gesamten Übertragungsverhalten enthalten sind. Das ganze System (7) lässt sich dann durch Abschneiden auf

$$(8) \quad \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(\rho) & \tilde{B}_1(\rho) \\ \tilde{C}_1(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

reduzieren, welches mit  $\tilde{x}$  nur noch die Zustände aus dem Zustandsvektor  $x_{b1}$  aus System (7) enthält. Für detailliertere

Informationen zum balancierten Abschneiden, zur Berechnung der Transformationsmatrix  $T$  und der Anwendung auf aeroelastische Systeme wird an dieser Stelle auf [9, 10] verwiesen.

## 2.2 Reglerentwurf

Eine Möglichkeit zur Regelung eines LPV-Systems ist der Entwurf einer dynamischen Ausgangsrückführung, welche die induzierte  $L_2$ -Norm des Systems minimiert. Dieser Ansatz wird als Verallgemeinerung des  $H_\infty$ -Entwurfs (siehe [11]) für LPV-Systeme verstanden. Hierzu wird das LPV-System aus Gleichung (1) in folgende Untermatrizen aufgespalten [8]

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12}(\rho) \\ C_2(\rho) & D_{21}(\rho) & D_{22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}.$$

Dabei wurde der Ausgangsvektor  $\tilde{y}$  aus Gleichung (1) in Mess- ( $y$ ) und Performance-Größen ( $z$ ), sowie der Eingangsvektor  $\tilde{u}$  in Stell- ( $u$ ) und Störgrößen ( $w$ ) aufgeteilt. Des Weiteren wird die induzierte  $L_2$ -Norm des Systems aus Gleichung (9) für  $x(0) = 0$  zu

$$(10) \quad \|G_{wz}\| = \sup_{\rho \in \mathcal{A}, w \in L_2 \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$$

definiert, wobei mit  $G_{wz}$  die Übertragungsmatrix des Systems aus Gleichung (9) von Eingang  $w$  auf Ausgang  $z$  bezeichnet wird [8]. Gesucht ist nun ein Regler  $K$ , welcher den geschlossenen Regelkreis mit der Übertragungsmatrix  $F_l(G, K)$  stabilisiert und gleichzeitig die Bedingung  $\|F_l(G, K)\| \leq \gamma$  erfüllt. Hierbei wird  $\gamma$  als obere Schranke der induzierten  $L_2$ -Norm aus Gleichung (10) definiert und mit  $F_l(G, K)$  wird die *Lower Fractional Transformation* (LFT) von  $G$  und  $K$  bezeichnet (siehe [11]). Dies kann gewährleistet werden, wenn zwei symmetrische positiv definite Lyapunov-Matrizen  $X(\rho)$  und  $Y(\rho)$  existieren, die für alle  $\rho \in \mathcal{A}$  die die LMIs

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{L}_A^-(X) - B_2 B_2^T & X C_{11}^T & \gamma^{-1}(B_1 - B_2 D_{112}) \\ * & -I & \gamma^{-1} D_{111} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{A^T}^-(Y) - C_2^T C_2 & Y B_{11} & \gamma^{-1}(C_1 - C_2 D_{112}) \\ * & -I & \gamma^{-1} D_{111}^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$(13) \quad \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1} I \\ * & Y \end{bmatrix} > 0,$$

mit

$$(14) \quad \mathcal{L}_A^-(X) = X(A - B_2 C_{12})^T + (A - B_2 C_{12})X - \sum_{i=1}^s \pm \left( \dot{\rho}_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} \right),$$

$$(15) \quad \mathcal{L}_{A^T}^-(Y) = Y(A - B_{12} C_2) + (A - B_{12} C_2)^T Y + \sum_{i=1}^s \pm \left( \dot{\rho}_i \frac{\partial Y}{\partial \rho_i} \right),$$

erfüllen und  $\mathcal{A}$  eine kompakte Menge beschreibt [6]. Auf die Angabe der Abhängigkeit aller Matrizen vom Parametervektor  $\rho$  wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet und mit  $*$  wird die symmetrische Vervollständigung

bezeichnet. Weiterhin muss das System aus Gleichung (9) unter Beibehaltung der Norm durch eine geeignete Transformation in die Darstellung

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_{11} & B_{12} & B_2 \\ C_{11} & D_{1111} & D_{1112} & 0 \\ C_{12} & D_{1121} & D_{1122} & I \\ C_2 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

überführt werden (siehe [12]). Mit der Darstellung (16) können dann die fehlenden Matrizen zu

$$(17) \quad B_1 = [B_{11} \ B_{12}],$$

$$(18) \quad C_1^T = [C_{11}^T \ C_{12}^T],$$

$$(19) \quad \begin{bmatrix} D_{111} \\ D_{112} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix} = [D_{111} \ D_{112}]$$

definiert werden [6]. Das Regelungsproblem wird gelöst, indem die Matrizen  $X(\rho)$  und  $Y(\rho)$  mit Hilfe der LMIs (11) - (13) so bestimmt werden, dass  $\gamma$  minimal wird. Um die Abhängigkeit von der Änderungsrate der Parameter  $\dot{\rho}$  zu betrachten, muss für die beiden Matrizen  $X(\rho)$  und  $Y(\rho)$  noch ein funktionaler Zusammenhang definiert werden. Dazu werden im Vorfeld vor der Synthese für beide Matrizen Basisfunktionen der Form

$$(20) \quad X(\rho) = X_0 + \rho_1 \cdot X_{11} + \rho_1^2 \cdot X_{12} + \dots + \rho_2 \cdot X_{21} + \dots$$

festgelegt [6]. Die Wahl der Basisfunktionen und der Ordnung, mit welcher die einzelnen Parameter berücksichtigt werden, erfolgt nach keinen festen Regeln und basiert im Wesentlichen auf der Erfahrung des Anwenders. Grundsätzlich gilt es, diese Basisfunktionen so einfach wie möglich zu halten, da deren Ordnung direkt mit der Anzahl an Unbekannten in den LMIs (11)-(13) korreliert und eine zu große Ordnung das Problem erheblich komplizierter gestalten kann [13].

Mit der Lösung für  $X(\rho)$ ,  $Y(\rho)$  und  $\gamma$  lässt sich dann ein Regler  $K$  der Form

$$(21) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R(\rho, \dot{\rho}) & B_R(\rho) \\ C_R(\rho) & D_R(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ y \end{bmatrix}$$

berechnen. Dessen Systemmatrix  $A_R$  ist zusätzlich zum Parametervektor  $\rho$  auch noch von dessen Änderungsrate  $\dot{\rho}$  abhängig. Für detaillierte Informationen zur Berechnung der Matrizen  $X(\rho)$  und  $Y(\rho)$  beziehungsweise der Reglermatrizen aus Gleichung (21) wird auf [6] verwiesen.

## 3 MODELLIERUNG

Es wird ein aeroelastisches Modell eines zivilen Passagierflugzeuges mit instationärer Aerodynamik verwendet, welches auf der Modellierung aus dem *Digital-X*-Projekt basiert [14]. Die Strukturmechanik des Flugzeuges wird durch die reduzierte modale Basis eines Finite-Elemente Modells beschrieben.

Mit Hilfe der Annahmen aus [15] können die Gleichungen der Starrkörperdynamik durch die nichtlinearen Gleichungen der Flugmechanik ersetzt werden, wodurch ein integriertes aeroelastisches Flugmechanikmodell der Form

$$(22) \quad \begin{bmatrix} m_b (V_b + \Omega_b \times V_b - T_{bE} g_E) \\ J_b \Omega_b + \Omega_b \times (J_b \Omega_b) \end{bmatrix} = \Phi_b^T P_g^{ext}(t),$$

$$(23) \quad M_{ff} \ddot{u}_f + B_{ff} \dot{u}_f + K_{ff} u_f = \Phi_f^T P_g^{ext}(t)$$

entsteht [16]. Die Matrizen  $\Phi_b^T$  und  $\Phi_f^T$  beschreiben die Modalmatrizen aufgeteilt in Starrkörper ( $b$ )- und flexible Moden ( $f$ ).  $V_b$  bzw.  $\Omega_b$  stellen die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten im flugzeugfesten Koordinatensystem dar. Die Transformationsmatrix  $T_{bE}$  bildet die Gravitation  $g_E$  vom erdfesten Koordinatensystem in das flugzeugfeste ab. Im Vektor  $u_f$  werden die Auslenkungen der flexiblen Schwingungsmoden zusammengefasst. Die Matrizen  $M_{ff}$ ,  $B_{ff}$  und  $K_{ff}$  beschreiben die modale Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix. Die Matrizen der Masse  $M_{ff}$  und der Steifigkeit  $K_{ff}$  ergeben sich aus der Modal-Transformation des kondensierten FE-Modells.

Die externen Lasten durch die Aerodynamik werden durch die *Doublet Lattice Method* (DLM) (siehe [17]) berechnet. Diese Methode ist allerdings nur im Frequenzbereich definiert und muss für die Verwendung im Zeitbereich in eine Zustandsraummodellierung transformiert werden. Hierzu kommt eine rationale Funktionsapproximation nach Roger [18] (RFA - *Rational Function Approximation*) zur Anwendung. Für eine detailliertere Beschreibung der Modellierung wird auf [16] verwiesen.

### 3.1 Böen-Modellierung

Zur Betrachtung von atmosphärischer Turbulenz in flugmechanischen Analysen wird in [19] die Verwendung des Dryden-Spektrums zur Ermittlung der Böengeschwindigkeiten empfohlen. Es werden nur vertikale und zur Flugzeuglängsachse symmetrische Böen betrachtet. Aus dem Leistungsspektrum in vertikaler Richtung kann nach [20] ein Formfilter

$$(24) \quad G_{dryd}(j\omega) = \sqrt{\sigma_w^2 T_w} \cdot \frac{1 + j\omega\sqrt{3}T_w}{(1 + j\omega T_w)^2},$$

$$(25) \quad T_w = \frac{L}{V}$$

erzeugt werden. Mit dessen Hilfe ist es möglich, aus einem weißen Rauschsignal atmosphärische Turbulenz in Form einer vertikalen Böengeschwindigkeit in Abhängigkeit von  $\sigma_w$ ,  $L$  und der Flugeschwindigkeit  $V$  zu erzeugen. Mit Hilfe der Varianz  $\sigma_w$  wird die Stärke der Turbulenz und die Flughöhe berücksichtigt. Die charakteristische Länge  $L$  ist ebenfalls von der Flughöhe abhängig und wird nach [21] auf  $L = 1750\text{ft}$  gesetzt.

### 3.2 Modellreduktion

Bei einer aeroelastischen Modellierung entsteht ein Modell mit einer sehr großen Anzahl an Zuständen ( $n_x > 100$ ). Um eine numerisch stabile Reglersynthese zu gewährleisten, ist es daher erforderlich die Modellordnung zu reduzieren. Zuerst wird das beschriebene Modell so weit wie möglich physikalisch vereinfacht. Das Übertragungsverhalten bei einer Anregung durch symmetrische Böen kann durch die Betrachtung der ersten 20 symmetrischen Moden hinreichend genau beschrieben werden. Das Modell wird anschließend an Trimpunkten im stationären Reiseflug in Höhe und Machzahl linearisiert und daraus ein gitterbasiertes LPV-Modell erzeugt. Es wird ein Flug mit einer Machzahl  $Ma = 0,85$  angenommen und die Flughöhe als LPV-Parameter  $\rho$  betrachtet. Es entsteht ein Zustandsraummodell des betrachteten Problems mit 76 Zuständen. In einem weiteren Schritt wird das Zustandsraummodell mit der in Abschnitt (2.1) beschriebenen balancierten Ordnungsreduktion auf 35 Zustände verkleinert.

## 4 REGELUNG

Ziel des Reglerentwurfes ist die Reduktion von Strukturlasten infolge atmosphärischer Turbulenz. Mit Hilfe von Simulationen wurden in diesem konkreten Fall die Belastung in der Flügelwurzel als die größten auftretenden Lasten identifiziert. Es wird eine Regelung mit Ausgangsrückführung entworfen, mit der die induzierte  $L_2$ -Norm aus Gleichung (10) des geschlossenen Regelkreises der verallgemeinerten Regelstrecke minimiert wird. Darunter versteht man eine um zusätzliche Ein- und/oder Ausgänge erweiterte Regelstrecke. Dies ermöglicht es, mehrere Anforderungen gleichzeitig zu berücksichtigen und den Entwurf besser zu spezifizieren [22].

### 4.1 Definition des Regelungsproblems

Die verallgemeinerte Regelstrecke des in diesem Beitrag betrachtete Regelungsproblems ist in Abbildung (1) dargestellt. Zur Reduktion der angesprochenen Strukturlasten

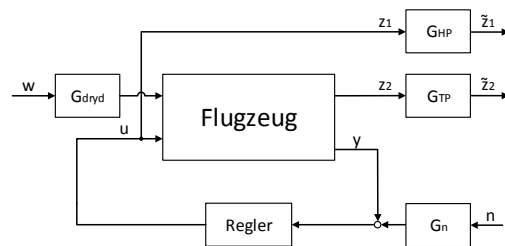


Abbildung 1. Darstellung formulierten Regelungsproblems

ten werden der Regelstrecke die Querkraft, sowie Biege- und Torsionsmoment in der Flügelwurzel als zusätzliche, nicht messbare Ausgänge hinzugefügt. Außerdem wird der Passagierkomfort durch die vertikale Beschleunigung im

Schwerpunkt quantifiziert. Diese vier Größen werden im Vektor  $z_2$  zusammengefasst. Des Weiteren wird der verallgemeinerten Regelstrecke ein Durchgriff der Stellgrößen  $u$  hinzugefügt, welcher im Folgenden als  $z_1$  bezeichnet wird. Als Messgrößen  $y$  werden vier vertikale Beschleunigungsmessungen im Schwerpunkt, Heck und Flügelspitze sowie –mitte verwendet. Die Wahl ist mit der einfachen Messbarkeit von Beschleunigungen und der guten Identifizierbarkeit von Schwingungen mit Hilfe von Beschleunigungssignalen begründet. Die Messgrößen werden mit einem additiven Fehler  $n$  versehen, um den Einfluss von Sensorrauschen abzubilden.

Zur besseren Umsetzung der gewünschten Anforderungen und zur relativen Gewichtung untereinander werden die Ausgänge  $z_1$  und  $z_2$  mit Gewichtungsfiltren versehen, wie in Abbildung (1) dargestellt. Dazu werden Tief- und Hochpassfilter erster Ordnung der Form

$$(26) \quad G_{HP}(s) = K_{HP} \cdot \frac{T_{HP} \cdot s}{1 + T_{HP} \cdot s},$$

$$(27) \quad G_{TP}(s) = K_{TP} \cdot \frac{1}{1 + T_{TP} \cdot s}$$

verwendet. Die Stellgrößen im Ausgang  $z_1$  werden mit Hochpassfiltern gewichtet um hochfrequente Stellsignale und Aktuator-Sättigung zu vermeiden. Die mit Hilfe des Reglers zu reduzierenden Größen im Ausgang  $z_2$  werden mit Tiefpassfiltern gewichtet, da die betrachtete Störung ebenfalls eine Tiefpasscharakteristik besitzt und somit stärkere Effekte der Böenregung in niedrigen Frequenzbereichen zu erwarten sind. Außerdem werden die Messfehler  $n$  mit  $G_n$  gewichtet und die Anregung des Flugzeugs durch Böen wird dem in Kapitel 3.1 vorgestellten Dryden-Filter und einem weißen Rauschsignal  $w$  realisiert.

## 4.2 Regler-Synthese

In der Regler-Synthese wird die induzierte  $L_2$ -Norm aus Gleichung (10) der verallgemeinerten Regelstrecke von der Störung durch die Böen  $w$  auf die definierten Anforderungen  $z = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]^T$  minimiert, indem die Messgrößen  $y$  mit einem Regler auf die Stellgrößen  $u$  rückgekoppelt werden.

Vor der eigentlichen Synthese des Reglers werden zunächst die Gewichtungsfunktionen aus Gleichung (26) und (27) parametrisiert. Die Parameter werden mit Hilfe einer Optimierung ermittelt, wie es beispielsweise in [23] beschrieben wird. Hierzu wird ein Referenz-Problem in einem einzelnen Gitterpunkt betrachtet und ein  $H_\infty$ -Regler dafür entworfen. Die Regelung in einem Gitterpunkt dient als Referenz, da ein LPV-Regler lokal in einem bestimmtem Gitterpunkt nur maximal die Leistungsfähigkeit eines  $H_\infty$ -Regler in diesem Punkt erreichen kann. Aus Gründen der Rechenzeit wird die Optimierung nur in einem Gitterpunkt durchgeführt. Verwendet wird hierzu das Optimierungstool *MOPS (Multi Objective Parameter Synthesis)* des DLR. Es ermöglicht eine Optimierung mit mehreren

Zielen bei gleichzeitiger Berücksichtigung von Einschränkungen [24].

Ziel der Optimierung ist es, die Gewichtungsfunktionen so zu bestimmen, dass die Schnittlasten in der Flügelwurzel minimal werden. Diese werden mit Simulationen im Zeitbereich ermittelt und mit Hilfe von Maximalwert und Standardabweichung beschrieben. Zusätzlich werden für die Optimierung Einschränkungen formuliert. Sowohl die Stellrate als auch der Stellwinkel der drei verwendeten Aktuatoren werden auf  $20^\circ$  beziehungsweise  $30^\circ/s$  beschränkt. Des Weiteren werden die vertikale Beschleunigung im Schwerpunkt und die Nickrate auf den jeweiligen Maximalwert im unregelmäßigen Fall beschränkt, um eine Verschlechterung des Passagierkomforts zu verhindern. Die Optimierung selbst wird in zwei Stufen mit jeweils verschiedenen Methoden durchgeführt. Um eine schnelle Konvergenz zu erreichen, wird im ersten Schritt mit der *Pattern-Search*-Methode ein gradientenfreies Verfahren verwendet. Das dabei erhaltene Ergebnis wird im zweiten Schritt mit der SQP-Methode (*Sequential Quadratic Programming*), also einem Verfahren welches auf Gradienten basiert, weiter optimiert. Grundsätzlich sind Gradienten-Verfahren effizientere Optimierungsmethoden und das SQP Verfahren ist darüber hinaus besonders für Optimierungen mit Beschränkungen geeignet. Da gradientenfreie Verfahren hingegen numerisch robuster sind, wird das beschriebene Vorgehen angewandt. Genauere Informationen zu den beiden Verfahren sind in [24] zu finden.

Mit den erhaltenen Gewichtungsfunktionen wird die Synthese des LPV-Reglers mit der Funktion *lpvsyn* aus der MATLAB Toolbox LPVTools [25] durchgeführt. Für die beiden Lyapunov-Matrizen  $X(\rho)$  und  $Y(\rho)$  wird eine linear von der Höhe abhängige Basisfunktion betrachtet und aufgrund der Größe wird das Regelungsproblem in der Synthese zunächst nur mit drei Gitterpunkten approximiert. Um die Synthese zusätzlich noch zu verbessern, wird das System in jedem Gitterpunkt mit einem Optimalwert skaliert. Da bei einer LPV-Synthese immer ein Minimum über alle Gitterpunkte gesucht wird, orientiert sich das Gesamtergebnis immer am schlechtesten aller Werte. Um das zu vermeiden, wird in jedem Gitterpunkt ein individueller  $H_\infty$ -Regler berechnet und das dabei erzielte  $\gamma$  als Optimalwert in dem jeweiligen Punkt definiert. Dieses Vorgehen wird *Gamma-Scaling* genannt (siehe [26]) und sorgt dafür, dass alle Gitterpunkte gleich gewichtet werden. Mit der Synthese wird unter den beschriebenen Bedingungen ein  $\gamma_{LPV} = 1,029$  erreicht. Das bedeutet, dass der erzielte Regler in jedem Gitterpunkt etwa 3% vom definierten Optimalwert abweicht.

Mit der durchgeführten Synthese wird ein Regler in den drei betrachteten Gitterpunkten erzeugt. Man erhält allerdings aufgrund der vorher festgelegten Basisfunktionen (siehe Gleichung (20)) von der Höhe abhängige Funktionen für  $X(\rho)$  und  $Y(\rho)$ , sodass anschließend für jede be-

liebige Höhe im betrachteten Parameterbereich ein Regler berechnet werden kann. Dabei ist zu beachten, dass die bei der Synthese erzielte Resultate nur in den vorher betrachteten Gitterpunkten garantiert werden können. Daher ist die Gültigkeit der Lyapunov-Matrizen für die LMIs (11)-(13) in allen anderen Punkten gesondert zu prüfen.

## 5 AUSWERTUNG

Zur Beurteilung des Reglers wird dessen Verhalten auf dem linearisierten Gesamtmodell untersucht. Es wird der in drei Gitterpunkten erhaltene Regler auf fünf Gitterpunkte erweitert. Um die Analyse zu vereinfachen, wird die Höhenänderung vernachlässigt und der Regler jeweils nur bei einer konstanten Höhe ausgewertet. Der geschlossene Regelkreis wird dann auf dessen Leistungsfähigkeit und Robustheit untersucht.

### 5.1 Beurteilung der Leistungsfähigkeit

Die Leistungsfähigkeit des Reglers wird zunächst mit Hilfe von Simulationen im Zeitbereich bewertet. Hierzu werden Simulationen mit und ohne Regler in allen betrachteten Flughöhen durchgeführt und anschließend die maximalen auftretenden Schnittlasten ausgewertet. Betrachtet werden die Resultate des geregelten Systems relativ zum unregulierten System.

In Abbildung (2) sind die in der Simulation erzielten Abminderungen der maximalen Schnittlasten in der Flügelwurzel in fünf verschiedenen Flughöhen dargestellt. Außerdem wird zur Bewertung des Passagierkomforts zusätzlich noch der Vergleich der vertikalen Beschleunigung im Schwerpunkt relativ zum unregulierten Fall abgebildet. Es

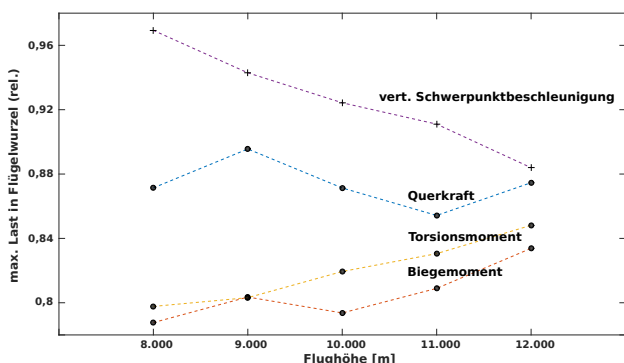


Abbildung 2. Abminderung der max. Lasten & Beschleunigungen

zeigt sich, dass durch den Regler für alle drei betrachteten Schnittlasten über den gesamten Höhenbereich Lastabminderungen zwischen 10% und 20% erreicht werden. Bei der Betrachtung der Beschleunigung im Schwerpunkt ergibt sich, dass das in Kapitel 4.1 formulierte Regelungsziel eingehalten werden konnte und in keiner der betrachteten

Flughöhen eine Verschlechterung gegenüber dem unregulierten Fall auftritt. Es fällt allerdings auf, dass die Leistungsfähigkeit der Regelung stark mit der Höhe schwankt. Die Ursache hierfür ist in der Festlegung der Gewichtungsfunktionen in Kapitel 4.2 zu suchen, da diese nur für eine Flughöhe von 8.000m optimiert und im Anschluss für den gesamten Höhenbereich verwendet wurden.

Des Weiteren werden die  $H_\infty$ - und  $H_2$ -Normen im unregulierten und geregelten Fall miteinander verglichen. Es wird aus der verallgemeinerten Regelstrecke aus Kapitel 4.1 nur das Übertragungsverhalten von der Anregung durch die Böen  $w$  auf die Schnittlasten in der Flügelwurzel im Ausgang  $z_2$  betrachtet. Die Normen werden für jede Schnittlast einzeln berechnet. Die  $H_2$ -Norm wird zusätzlich betrachtet, da sie der Standardabweichung des Systemausgangs infolge einer Störung durch weißes Rauschen bei einer unendlich langen Simulation entspricht. Sie ist daher ein gutes Bewertungskriterium für Systeme unter stochastischer Anregung. Die Normen wurden ebenfalls in allen betrachteten Flughöhen berechnet und mit dem unregulierten Fall ins Verhältnis gesetzt. Die Ergebnisse sind in Abbildung (3) dargestellt. Die Betrachtung der Systemnormen

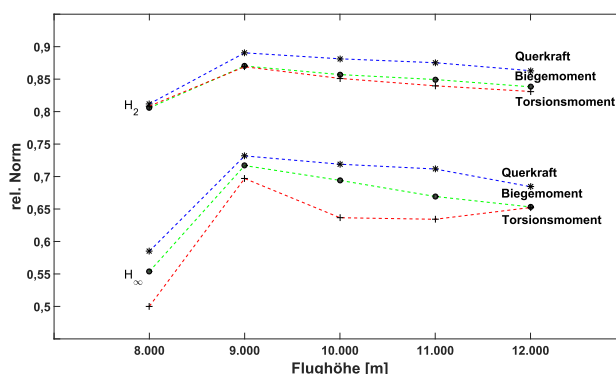


Abbildung 3. Veränderung der Systemnormen durch Regelung

bestätigt die Resultate, die bereits bei der Analyse der Simulationsergebnisse festgestellt wurden. Es wird eine signifikante Abminderung über den gesamten betrachteten Höhenbereich erreicht, jedoch schwankt die Reduzierung je nach Flughöhe. Es lässt sich feststellen, dass die Resultate im Punkt der Optimierung aus Kapitel 4.2 am besten und in den anderen Flughöhen erkennbar schlechter ausfallen.

Abschließend wird noch der benötigte Stellaufwand in der Simulation betrachtet. Die jeweils maximalen und minimalen Werte für Stellwinkel und Stellrate im gesamten betrachteten Betriebsbereich sind in Tabelle 1 dargestellt. Es wird deutlich, dass der benötigte Stellaufwand der Regelung innerhalb der definierten Betriebsgrenzen ( $\pm 20^\circ$  und  $30^\circ/s$ ) liegt. Auffällig ist, dass das äußere Querruder so gut wie gar nicht benutzt wird. Das ist allerdings mit den in Kapitel 4.2 definierten Zielen der durchgeführten Optimierung zu begründen. Durch die Minimierung des Torsions-

<b>Stellwinkel (°)</b>	max.
Höhenruder	1,36
Querruder (innen)	4,01
Querruder (außen)	0,02
<b>Stellrate (°/s)</b>	max.
Höhenruder	11,16
Querruder (innen)	12,86
Querruder (außen)	0,04

**Tabelle 1.** Stellaufwand der Regelung

moments in der Flügelwurzel wird eine möglichst geringe Nutzung der Querruder angestrebt, da dies zu einer Verwindung des Flügels führt. Da aber durch die zusätzlichen Beschränkungen in vertikaler Beschleunigung und Nickrate eine hauptsächliche Nutzung des Höhenruders verhindert wird, verteilt sich der Stellaufwand auf inneres Querruder und Höhenruder.

## 5.2 Robustheitsanalyse

Zur Beurteilung der Robustheit des Reglers wird als erstes die Phasen- ( $\phi_r$ ) und Amplitudenreserve ( $A_r$ ) des Regelkreises ermittelt. Diese können bei einem Mehrgrößensystem beispielsweise für jeden Ein- und Ausgang einzeln berechnet werden, indem jeder einzeln aufgeschnitten und jeweils der dabei entstehende offene Regelkreis einzeln betrachtet wird. Dies wird in allen betrachteten Flughöhen durchgeführt und die dabei erhaltenen kleinsten Werte sind in Tabelle (2) dargestellt. Es zeigt sich, dass eine Phasen-

<b>Eingang</b>	$A_r$	$\phi_r$
Höhenruder	5.14 dB	86.6°
Querruder (innen)	18.98 dB	101.1°
Querruder (außen)	51.89 dB	-
<b>Ausgang</b>	$A_r$	$\phi_r$
Beschl. (Schwerpunkt)	14.15 dB	-
Beschl. (Heck)	5.69 dB	67.9°
Beschl. (Flügel - außen)	22.88 dB	-
Beschl. (Flügel - innen)	16.64 dB	-

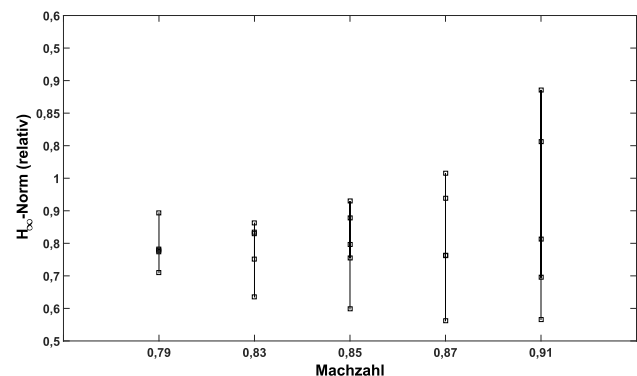
**Tabelle 2.** Amplituden- und Phasenreserve

reserve ( $\phi_r$ ) von mindestens 67.9° und eine Amplitudenreserve von mindestens  $A_r = 5.14$  dB erreicht werden. Als Richtwerte werden typischerweise eine Phasenreserve von  $\phi_r = 45^\circ$  und eine Amplitudenreserve von  $A_r = 6$  dB angenommen. Die Amplitudenreserve liegt nur leicht unterhalb von  $A_r = 6$  dB und kann damit noch als ausreichend groß betrachtet werden. Dies kann auf Kosten der Leistungsfähigkeit verbessert werden, indem die Zeitkonstante  $T_{HP}$  in dem Gewichtungsfilter aus Gleichung (26) des entsprechenden Aktuators reduziert und somit dessen Bandbreite verkleinert wird [11]. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Gewichtung durch die individuelle Verstärkung  $K_{HP}$  des Filters (26) zu vergrößern, sodass die Nutzung des Aktuators in der Reglersynthese stärker einge-

schränkt wird. Gleiches lässt sich auch bei der zweiten etwas zu geringen Amplitudenreserve  $A_r = 5.69$  dB anwenden. Allerdings gilt zu beachten, dass dadurch die erreichte Lastabminderung verschlechtert wird.

Des Weiteren werden mit Hilfe von Simulationen im Zeitbereich die Auswirkungen von Parametervariationen untersucht. Das Flugzeug wurde im Reglerentwurf mit einer festen Masse und Schwerpunktlage bei einem Flug mit konstanter Machzahl betrachtet. Da diese Parameter im Flug jedoch nicht konstant bleiben, wird abschließend der Einfluss von Abweichungen gegenüber dem nominalen Fall untersucht. Es werden daher die Stabilität sowie Leistungsfähigkeit des Reglers in verschiedenen Flughöhen bei verschiedenen Machzahlen und Massenfällen untersucht.

Zunächst wird bei konstanter Masse und Schwerpunktlage die Machzahl zwischen 0,79 und 0,91 variiert. Zur Analyse wird die  $H_\infty$ -Norm des geschlossenen Regelkreises in allen betrachteten Höhen berechnet und mit der Norm im unregulierten Fall ins Verhältnis gesetzt. Wie bereits bei der Bewertung der Leistungsfähigkeit wird für die Berechnung der Norm nur das Übertragungsverhalten von der Anregung durch die Böen  $w$  auf die Schnittlasten in der Flügelwurzel im Ausgang  $z_2$  aus der verallgemeinerten Regelstrecke aus Kapitel 4.1 betrachtet. Die entsprechenden Resultate sind in Abbildung (4) dargestellt. Es zeigt sich, dass der



**Abbildung 4.** Performance unter Variation der Machzahl

Regler zwar bei allen betrachteten Machzahlen in allen Höhen stabil arbeitet, jedoch die Performance teilweise sehr starken Schwankungen unterworfen ist. Insbesondere bei den beiden Machzahlen oberhalb des Auslegungspunktes sind große Abweichungen zu beobachten. Sind im Flugbetrieb im gewünschten Betriebsbereich stärkere Schwankungen in der Flugmachzahl zu erwarten, ist die Annahme einer konstanten Machzahl daher nicht mehr ausreichend. Es könnte also erforderlich sein, die Machzahl zusätzlich zur Höhe als variablen Parameter in der Reglersynthese zu berücksichtigen. Dies würde den Entwurf aufgrund der steigenden Komplexität jedoch deutlich erschweren.

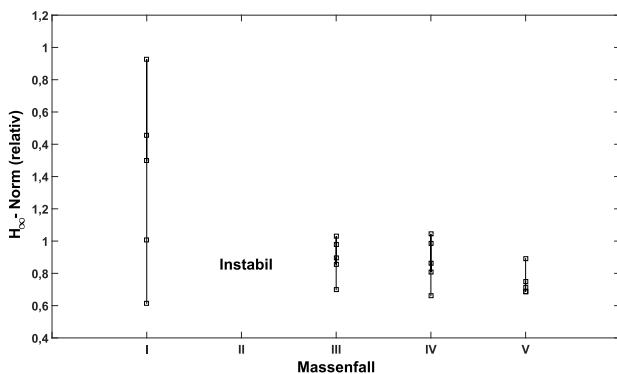
Im zweiten Fall wurden bei einer konstanten Machzahl von  $Ma = 0,85$  vier andere Massenverteilungen untersucht. Die

Änderungen in der Masse  $m$  und im Schwerpunkt  $x_g$  gegenüber dem Auslegungspunkt sind in Tabelle (3) dargestellt. Bei der Variation der Masse werden neben dem Aus-

Massenfall	I	II	III	IV	V
$\Delta m$	(-)	(-)			
$\Delta x_g$	(-)	(+)		(-)	(-)

**Tabelle 3.** Beschreibung der betrachteten Massenfälle

legungsfall (III) mit (I) und (II) zwei Extremfälle mit sehr geringen Gesamtmassen betrachtet. Der erste Fall (I) stellt dabei einen Flug komplett ohne Nutzlast dar. In den anderen beiden betrachteten Betriebspunkten (IV) und (V) liegt die gleiche Masse wie im Auslegungsfall mit unterschiedlicher Verteilung vor. Die erzielten Resultate sind in Abbildung (5) dargestellt. Es wird deutlich, dass eine Ver-



**Abbildung 5.** Performance unter Variation des Massenfalls

änderung der Nutzlast für den Regler problematisch werden kann. Im zweiten betrachteten Betriebspunkt war der geschlossene Regelkreis beispielsweise nicht mehr stabil. Auch im ersten Betriebspunkt, welcher einen Flug ohne Nutzlast darstellt, liefert der Regler keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Es zeigt sich eine Vergrößerung der  $H_{\infty}$ -Norm gegenüber dem unregulierten Fall in einigen Höhen. Zwar ist das ganze System in diesem Fall noch stabil, dessen Performance würde aber einer Anwendung der Regelung in diesem Fall widersprechen. Eine Veränderung der Massenverteilung hat in dieser Analyse hingegen keinen nennenswerten Effekt auf die Regler-Performance und Stabilität. Es zeigt sich also, dass die Veränderung der Masse einen durchaus kritischen Einfluss auf das Regelverhalten besitzt, da dies die Schwingungseigenschaften gegenüber dem Auslegungsfall zu stark verändert.

## 6 FAZIT

Es wurde ein LPV-Regler für die robusten Böenlastabminderung mit aeroelastischer Modellierung entworfen. In den durchgeführten Simulationen zeigten sich in allen betrachteten Flughöhen gute Ergebnisse in der Abminderung der Belastungen in der Flügelwurzel. Es konnten Querkraft, Biege- und Torsionsmoment in der Flügelwurzel deutlich

über den betrachteten Höhenbereich abgemindert werden. Außerdem wurde die vertikale Beschleunigung im Schwerpunkt des Flugzeugs als Index für den Passagierkomfort leicht reduziert werden. Allerdings zeigte sich eine erkennbare Schwankung in der Leistungsfähigkeit in Abhängigkeit der Flughöhe. Als Ursache wurde die Optimierung der verwendeten Gewichtungsfiler genannt, da diese nur für einen Gitterpunkt ermittelt und anschließend für alle anderen Gitterpunkte verwendet wurden. Eine nachträgliche Optimierung des LPV-Problems würde möglicherweise eine gleichmäßigere Abminderung ermöglichen.

Bei der Robustheitsanalyse zeigte sich, dass die Regelung eine ausreichende Phasenreserve aufweist, die Amplitudenreserve allerdings in einzelnen Fällen etwas zu gering ausfiel. Es wurden Möglichkeiten aufgezeigt, dies im Bedarfsfall zu korrigieren. Es zeigte sich weiterhin, dass insbesondere die Masse des Flugzeugs ein kritischer Faktor ist. Bei der Betrachtung von geringeren Massen zeigten sich Instabilitäten oder Verstärkungen der Lasten gegenüber dem unregulierten Fall. Als weniger kritisch zeigte sich der Einfluss der Machzahl. Eine Variation führte in den betrachteten Fällen nicht zu Instabilitäten. Allerdings zeigten sich insbesondere bei Machzahlen oberhalb der Auslegungsgröße Schwankungen in der Performance. Diese Erkenntnisse sollten bei einer möglichen Weiterentwicklung beachtet werden. Des Weiteren wurde in diesem Beitrag die entworfene Regelung nur isoliert betrachtet. Da jedoch die primären Steuerflächen eines Flugzeugs benutzt werden, sollten Wechselwirkungen zwischen der Flugsteuerung und der Regelung zur Lastabminderung ebenfalls untersucht werden.

Insgesamt hat sich gezeigt, dass die Anwendung der LPV-Regelung auf aeroelastische Systeme zwar mit einigen Herausforderungen verbunden ist, aber trotzdem eine attraktive Möglichkeit zur robusten Böenlastabminderung darstellt.

## Literatur

- [1] Christopher D. Regan and Christine V. Jutte. Survey of applications of active control technology for gust alleviation and new challenges for lighter-weight aircraft. Technical Report NASA/TM-2012-216008, NASA Dryden Flight Research Center, Edwards, CA, USA, April 2012.
- [2] T. E. Disney. C-5A active load alleviation system. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14:81–215, 1977.
- [3] J. F. Johnston. Accelerated development and flight evaluation of active controls concepts for subsonic transport aircraft - Volume 1: Load alleviation/extended span development and flight tests. Technical Report NASA-CR-159097, LR-29003-1-VOL-1, Lockheed-California Company, Burbank, CA, USA, September 1979.
- [4] Nabil Aouf, Benoit Boulet, and Ruxandra Botez. Robust gust load alleviation for a flexible aircraft. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 46:131–139, 2000.
- [5] Natascha Jansson. Gust load alleviation using robust control. Technical report, Aeronautical and Vehicle Engineering - KTH Stockholm, Juni 2009.



- [6] Fen Wu, Xin Hua Yang, Andy Packard, and Greg Becker. Induced  $L_2$ -Norm control for LPV-Systems with bounded parameter variation rates. In *American Control Conference*, 1996.
- [7] Gary J. Balas. Linear, parameter-varying control and its application to aerospace systems. In *ICAS International Council of the Aeronautical Sciences*, September 2002.
- [8] G. Becker and A. Packard. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 23:205–215, 1994.
- [9] G.D. Wood, P.J. Goddard, and K. Glover. Approximation of linear parameter-varying systems. In *Conference of Decision and Control*, Dezember 1996.
- [10] Claudia P. Moreno, Peter J. Seiler, and Gary J. Balas. Model reduction for aeroservoelastic systems. *Journal of Aircraft*, 51:280–290, 2014.
- [11] Sigur Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Chichester, 2005.
- [12] M. G. Safonov, D. J. N. Limebeer, and R. Y. Chiang. Simplifying the  $H_\infty$ -theory via loop-shifting, matrix-pencil and descriptor concepts. *International Journal of Control*, 50:2467–2488, 2007.
- [13] Harald Pfifer. *LPV/LFT Modeling and its Application in Aerospace*. PhD thesis, Technische Universität München, 2013.
- [14] Norbert Kroll and Cord-Christian Rossow. Digital-X: DLR's way towards the virtual aircraft. In *NIA CFD Conference*, 2012.
- [15] Martin R. Waszak and David K. Schmidt. Flight dynamics of aeroelastic vehicles. *Journal of Aircraft*, 25:563–571, 1988.
- [16] Thiemo M. Kier and Gertjan H. N. Looye. Unifying manoeuvre and gust loads analysis models. In *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Juni 2009.
- [17] E. Albano and W. P. Rodden. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, 7.7:279–285, 1968.
- [18] Kenneth L. Roger. Airplane math modeling methods for active control design. In *AGARD-CP 228*, August 1977.
- [19] Rudolf Brockhaus, Wolfgang Alles, and Robert Luckner. *Flugregelung*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [20] Frederic M. Hoblit. *Gust Loads on Aircraft: Concepts and Applications*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Washington D.C., 1988.
- [21] Military Specification MIL-F-8785C: Flying qualities of piloted airplanes, 1980.
- [22] Jörg Raisch. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. Oldenburg Wissenschaftsverlag, Berlin, 1994.
- [23] Jean-François Magni, Samir Bennani, and Jan Terlouw. *Robust Flight Control: A Design Challenge*. Springer, Heidelberg, 1997.
- [24] Hans-Dieter Joos. *MOPS - Multi Objective Parameter Synthesis, User Guide V6.5*. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Robotik und Mechatronik, Oberpfaffenhofen, 2013.
- [25] A. Hjartarson, P.J. Seiler, and G.J. Balas. LPVTools: A toolbox for modeling, analysis and synthesis of parameter varying control systems. In *IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, Oktober 2015.
- [26] Florian Saupe. *Linear Parameter Varying Control Design for Industrial Manipulators*. PhD thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2013.