

VERGLEICH VERSCHIEDENER ANSÄTZE ZUR MODELLIERUNG DER TEMPERATURFLUKTUATIONEN ANHAND DER STRAHLMISCHUNG IN TURBOFANTRIEBWERKEN

J. Trümner, Ch. Mundt, Universität der Bundeswehr München,
Institut für Thermodynamik, Werner-Heisenberg-Weg 39, 85577 Neubiberg, Deutschland

Zusammenfassung

Der Einsatz von Blütenmischern in Turbofantriebwerken mit kleinen und mittleren Nebenstromverhältnissen ist seit längerem eine gängige Methode, um sowohl die Leistungs-, als auch die Lärmcharakteristik von Flugzeugen zu verbessern.

Zur Optimierung solcher Bauteile werden zunehmend numerische Verfahren verwendet, da diese oft deutliche Kosten- und Zeitersparnisse gegenüber experimentellen Methoden mit sich bringen. Für industrielle Zwecke kommen i.d.R. RANS-Methoden zum Einsatz, die jedoch die thermische Durchmischung in turbulenten Strömungen stark vereinfachen und dadurch zu Ergebnissen führen können, die stark von entsprechenden Experimenten abweichen.

Um diesem Problem zu begegnen wurden zwei alternative Schließungsansätze, ein algebraischer und ein differentieller, für den turbulenten Wärmetransport, aufbauend auf einem Reynoldsspannungsmodell-Modell, in den Open Source Code OpenFOAM implementiert und mit den Ergebnissen der Standardmodellierung verglichen.

Besonders das algebraische Modell zeichnet sich hierbei durch eine stärkere Durchmischung aus. Während diese jedoch hauptsächlich im Bereich hoher Gradienten, also kurz hinter dem Mischer, stattfindet und stromab schnell abfällt, sorgt das differentielle Modell im Freistrah für einen höheren turbulenten Wärmetransport.

1. EINLEITUNG

Die stetig wachsende Zahl an Fluggästen stellt die zivile Luftfahrtindustrie vor anspruchsvolle Aufgaben. Ein harter Preiskampf und begrenzte fossile Energieträger führen dazu, dass die Fluggesellschaften nach immer effizienteren Antriebssystemen verlangen. In jüngerer Vergangenheit hat außerdem die Lärmemission deutlich an Bedeutung gewonnen, da Flughafenbetreiber ihre Start- und Landegeühren an die Lärmkategorie des Flugzeugs binden, bzw. bestimmte Zeiten nur an besonders leise Maschinen vergeben.

Nachdem Mitte der 50er Jahre die Entwicklung von Zweistromtriebwerken zu deutlichen Verbesserungen gegenüber Einstromtriebwerken bezüglich Verbrauch und Lärmemission führte, wurden in den 60er Jahren erste Untersuchungen zur Mischung beider Strahlen und Expansion durch eine gemeinsame Düse durchgeführt [1,2]. Das Prinzip ist dabei dasselbe, das schon ungemischte Zweistrahtriebwerke effizienter macht: dem hochenergetischen Kernstrahl wird vor der Expansion Energie entzogen und auf den kalten Nebenstrom übertragen, wodurch der Vortriebswirkungsgrad steigt und die Maximalgeschwindigkeiten im Freistrah sinken. Letzteres führt nach Lighthill [3] auch zur Lärmreduktion.

Um die Durchmischung von Kern- und Nebenstrom zu erhöhen, kommen Blüten- bzw. Zwangsmischer zum Einsatz, die Wirbelsysteme in axialer Richtung erzeugen und dadurch den Transport thermischer Energie begünstigen. Bei der Auslegung dieser Bauteile gilt es, einen hohen Mischungsgrad zu erzeugen und gleichzeitig zusätzliche Totaldruck- und Reibungsverluste möglichst gering zu halten.

Bei der computergestützten Optimierung von um- und durchströmten Bauteilen spielen RANS-Verfahren (Reynolds Averaged Navier-Stokes) nach wie vor eine

dominante Rolle. Im Gegensatz zu rechenintensiveren Ansätzen wie DNS (Direct Numerical Simulation) oder LES (Large Eddy Simulation) werden hierbei Strukturen geringer räumlicher und zeitlicher Ausdehnung nicht aufgelöst, sondern statistisch (zeitlich gemittelt) mittels Turbulenzmodellierung erfasst. Obwohl die Strömung dadurch signifikant vereinfacht wird, führen RANS-Rechnungen in vielen technischen Anwendungen bei moderatem Rechenaufwand zu aussagekräftigen Ergebnissen. Da die betrachtete Düse kritisch durchströmt wird, kommt hier das FANS-Verfahren (Favre Averaged Navier-Stokes) zum Einsatz, welches die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen dichtegewichtet zeitlich mittelt [4].

Es existiert eine Vielzahl an Turbulenzmodellen, wobei das Hauptaugenmerk i.d.R. auf der realistischen Wiedergabe des Impulstransportes bei geringen Temperaturgradienten liegt und für den turbulenten Wärmetransport eine konstante turbulente Prandtl-Zahl definiert wird. Dieser Ansatz wird im Folgenden als EDM (Eddy Diffusivity Model) bezeichnet. Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt, dass dies besonders bei großen Temperatur- und Dichtegradienten zu einer deutlichen Unterschätzung der thermischen Ausmischung führt [5][6]. Grund hierfür sind in erster Linie Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten, die in Scherschichten mit großen Dichteunterschieden einen stärkeren Einfluss haben, als in homogenen Temperaturfeldern.

Es wurden, insbesondere für Zweigleichungsmodelle, verschiedene Ansätze verfolgt, um dieser Schwäche zu begegnen. Zum einen wurden existierende Turbulenzmodelle bezüglich entsprechender Strömungsfelder neu kalibriert [7], was jedoch zum Nachteil hat, dass die Allgemeingültigkeit verloren geht, zum anderen wurden Korrekturverfahren entwickelt, die darauf abzielen in Gegenwart hoher Temperaturgradienten einen stärkeren

turbulenten Impuls- und somit Wärmetransport zu erzwingen [8][9]. Saegeler et al. [10] konnten mit der Korrekturmethode nach Abdol-Hamid [9] deutlich bessere Übereinstimmungen mit experimentellen Daten an Blütenmischern erzielen.

Abgesehen davon, dass die bisher genannten Methoden die Anisotropie der Turbulenz im Wärmetransport nicht berücksichtigen, sind sie durch zwei weitere Annahmen nur bedingt anwendbar:

- 1) Es wird eine konstante turbulente Prandtl-Zahl im gesamten Rechenggebiet angenommen
- 2) Der Wärmefluss zeigt immer entgegen der Richtung des Temperaturgradienten

Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Annahmen in turbulenten Scherschichten i.d.R. nicht erfüllt sind [11,12].

Abhilfe schaffen diesbezüglich differentielle Ansätze, bei denen, analog zu den Transportgleichungen der Turbulenzmodelle, zusätzliche Transportgleichungen für die Temperaturfluktuationen gelöst werden. Saegeler et al. [13] zeigten, dass dies zu einem komplexeren Mischungsverhalten führt, bei dem die turbulente Prandtl-Zahl keineswegs konstant ist.

Die vorliegende Arbeit basiert auf einem Reynoldsspannungsmodell (RSM), da diese Verfahren dafür bekannt sind, drallbehaftete Strömungen, wie sie im Nachlauf des Blütenmischers auftreten, besser zu beschreiben als Zweigleichungsmodelle [4]. Ein weiterer Vorteil des RSM ist, dass die Reynoldsspannungen zur Berechnung des turbulenten Wärmetransportes genutzt und somit auch algebraische Modelle ohne die beiden oben genannten Einschränkungen formuliert werden können.

Es wurden ein differentielles und ein algebraisches Modell für den turbulenten Wärmetransport in den Open Source Löser OpenFOAM implementiert und sowohl qualitativ als auch quantitativ, bezüglich Mischer- und Düsencharakteristika, mit dem Eddy Diffusivity Modell bei verschiedenen turbulenten Prandtl-Zahlen verglichen.

2. TURBULENZ- UND TEMPERATURTURBULENZMODELLIERUNG

2.1. Boussinesq-Approximation

Bei der Favremittelung der Navier-Stokes-Gleichungen entsteht ein gemittelter Term in der Impulsgleichung, der aus der Dichte und den Geschwindigkeitsfluktuationen hervorgeht.

$$(1) \quad \tau_{ij} = -\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j}$$

Dieser symmetrische Tensor zweiter Ordnung wird als Reynoldsspannungstensor bezeichnet und repräsentiert den Einfluss der Turbulenz auf die Grundströmung. Null-, Ein- und Zweigleichungsmodelle basieren i.d.R. auf der Boussinesq-Annahme, unter der der Reynoldsspannungstensor folgendermaßen berechnet wird:

$$(2) \quad \tau_{ij} = 2\mu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}.$$

Hierbei ist k die turbulente kinetische Energie und μ_t die Wirbelviskosität. Letztere wird beispielsweise im k - ϵ -Modell als Funktion von k und seiner Dissipationsrate ϵ mit dem Koeffizienten $C_\mu=0,09$ folgendermaßen definiert

$$(3) \quad \mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}.$$

Der Ausdruck in Klammern in (2) enthält ausschließlich Derivative des mittleren Strömungsfeldes, sodass τ_{ij} anstatt von sechs, nur noch von zwei Unbekannten abhängig ist, für die jeweils eine Transportgleichung gelöst wird.

2.2. Reynoldsspannungsmodell

Da sich gezeigt hat, dass der vom Blütenmischer erzeugte axiale Drall von Zweigleichungsmodellen nur schlecht wiedergegeben wird, liegt hier allen betrachteten Rechnungen das Reynoldsspannungsmodell nach Launder, Reece und Rodi [14] mit der Erweiterung um Wandreflektionsterme von Launder und Gibson [15] zugrunde. Hierbei werden sechs Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen (4) und eine für deren Dissipationsrate (11) gelöst.

$$(4) \quad \frac{D(\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j})}{Dt} = D_{ij} - P_{ij} - \epsilon_{ij} + \Phi_{ij}$$

Die Diffusion setzt sich dabei folgendermaßen zusammen

$$(5) \quad D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_l + \frac{\mu_T}{\sigma_R} \right) \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_i} \right].$$

Der Produktionsterm ist geschlossen und erfordert daher keine weiteren Modellierungen

$$(6) \quad P_{ij} = \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}.$$

Für die Dissipation gilt

$$(7) \quad \epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon.$$

Der schwierigste Teil der Modellierung ist die Druck-Dehngeschwindigkeit Φ_j . Diese wird in den meisten Fällen in einen langsamen, einen schnellen und ein harmonischen Anteil aufgeteilt, wobei letzterer im verwendeten Modell vernachlässigt wird. Für den langsamen Anteil gilt

$$(8) \quad \phi_{ij}^{(l)} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) + \phi_{ij}^{WR(l)}$$

Der schnelle Anteil setzt sich wie folgt zusammen

$$(9) \quad \phi_{ij}^{(s)} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + \phi_{ij}^{WR(s)}$$

Für die beiden Wandreflektionsterme (WR) sei an dieser Stelle auf die oben genannte Literatur verwiesen. Die turbulente kinetische Energie ergibt sich aus der Spur des Tensors der Geschwindigkeitsfluktuationen

$$(10) \quad k = \frac{1}{2} * Spur(\overline{u'_i u'_j})$$

Die Transportgleichung für die Dissipationsrate nimmt eine deutlich kompaktere Form an

$$(11) \quad \frac{D(\bar{\rho} \epsilon)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_l + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \bar{\rho} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k}$$

Die Modellkonstanten sind hierbei $\sigma_R=0,82$, $C_1=1,8$, $C_2=0,6$, $\sigma_\epsilon=1,3$ $C_{\epsilon 1}=1,44$, $C_{\epsilon 2}=1,92$.

2.3. Wärmetransportmodellierung

Analog zum Reynoldsspannungstensor ergibt die Favre-Mittelung in der Energiegleichung einen weiteren nicht

geschlossenen Term, der sich aus der Dichte, der spezifischen Wärmekapazität und den fluktuierenden Anteilen von Geschwindigkeit und Temperatur zusammensetzt

$$(12) \quad q_{t_i} = c_p \bar{\rho} \overline{u_i' \theta'}$$

Dieser Term wird in Anlehnung an den laminaren Wärmetransport turbulenter Wärmetransport genannt. Da er in turbulenten Strömungen eine essentielle Rolle spielt, werden in dieser Arbeit verschiedene Schließungsansätze vorgestellt und Ihr Einfluss auf die Düsenströmung eines gemischten Triebwerks untersucht.

2.3.1. Eddy Diffusivity Model (EDM)

Das einfachste und zugleich verbreitetste Modell beruht auf der Analogie zum Fourier-Gesetz, welches den laminaren Wärmetransport beschreibt

$$(13) \quad q_{t_i} = -c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$$

mit

$$(14) \quad Pr_t = \frac{\mu_t}{\alpha_t}$$

Hier wird, wie bereits erwähnt, eine konstante turbulente Prandtl-Zahl definiert. Aus Experimenten weiß man, dass in Wandnähe höhere ($Pr_t \approx 1,0$) und in Freistrahlen niedrigere ($Pr_t \approx 0,5$) turbulente Prandtl-Zahlen auftreten.

Die Nachteile sind dabei der Verlust der Informationen über die Anisotropie der Turbulenz durch die Verwendung der Wirbelviskosität und die reine Richtungsabhängigkeit vom Temperaturgradienten. μ_t kann jedoch beispielsweise in einer Scherschicht mit Temperaturgefälle große Werte annehmen, weil die Fluktuationen in Strömungsrichtung groß sind. Da der Temperaturgradient jedoch senkrecht auf der Scherschicht steht findet ein starker Transport in dieser Richtung statt, obwohl die Fluktuationen parallel dazu deutlich geringer sind.

2.3.2. Modell nach Younis et al.

Younis, Speziale und Clark [16] haben ein algebraisches Modell für $\overline{u_j' \theta'}$ entwickelt, das an die exakte, gemittelte Transportgleichung der Temperaturfluktuationen angelehnt ist. Letztere kann aus der Verknüpfung von Impuls- und Energiegleichung hergeleitet werden. Der Ansatz enthält die Reynoldsspannungen sowie räumliche Derivate des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes. Des Weiteren werden die turbulente Zeitskala

$$(15) \quad \tau = \frac{k}{\varepsilon},$$

sowie die entsprechende Längenskala

$$(16) \quad l = \frac{k^2}{\varepsilon}$$

in den einzelnen Termen berücksichtigt. Für eine wandfreie Strömung liefert das Younis-Modell folgenden Zusammenhang

$$(17) \quad -\overline{u_i' \theta'} = C_1 \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + C_2 \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} P_{ij} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$$

Die Konstanten wurden im Vergleich mit LES-Daten

folgendermaßen bestimmt: $C_1 = -4,55e-2$ $C_2 = 3,73e-1$ $C_3 = -3,73e-3$ $C_4 = -2,35e-2$. Um das Modell auf wandgebundene Strömungen anwendbar zu machen, wurde von Younis, Weigand und Spring [17] ein Korrekturverfahren für C_1 vorgeschlagen, das auch in dieser Arbeit verwendet wurde. Das Modell gibt viele Aspekte des turbulenten Skalartransports richtig wieder, ohne ein Gleichungssystem zu lösen. Der Nachteil ist, dass der Temperaturgradient auch in diesem Ansatz eine dominierende Rolle spielt, da er in allen Termen auftaucht. Außerdem zeigte das Modell ein deutlich schlechteres Konvergenzverhalten als das EDM.

2.3.3. Differential Second-Moment Closure Model (DSM)

Ein deutlich aufwändigerer Schließungsansatz für $\overline{u_i' \theta'}$ beruht auf der Lösung der in 2.3.2 erwähnten Transportgleichung. Launder hat hierfür den Begriff Second-Moment Closure eingeführt, der in dieser Arbeit übernommen wird.

Saegeler et al. [13] haben den Vorschlag von Lai et al. [20] auf kompressible Strömungen übertragen und unter der Voraussetzung hoher Reynolds-Zahlen und lokal isotroper Turbulenz nach Johnson [21] vereinfacht. Dabei entfallen die Terme für den turbulent diffusen Transport und die molekulare Dissipation. Da gleiches auch bei anisotroper Turbulenz zu guten Ergebnissen führt und Grundlage des YSC-Modells ist, werden beide Ausdrücke hier ebenfalls nicht berücksichtigt. Die Transportgleichung lautet somit

$$(18) \quad \frac{D(\overline{\rho u_i' \theta'})}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_s^\theta \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{\rho u_i' u_k'} \frac{\partial u_j' \theta'}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j' u_k'} \frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_k} \right) \right] + \overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j' \theta'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{\rho u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{\rho u_j' \theta'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$$

Die Modellkonstanten sind dabei $C_s^\theta = 0,11$, $C_{1\theta} = 3,0$ und $C_{2\theta} = 0,4$.

Der Modellierungsgrad ist hier deutlich geringer als bei algebraischen Ansätzen, sodass davon ausgegangen werden kann, dass die Physik besser beschrieben wird. Dadurch, dass drei zusätzliche Transportgleichungen gelöst werden, steigt jedoch der Rechenaufwand.

2.3.4. Modell nach Rogers et al.

Rogers et al. [18] haben ein algebraisches Modell für homogene Scherströmungen entwickelt, welches einen Tensor O_{ij} definiert, für den folgender Zusammenhang gilt

$$(19) \quad O_{ij}(-\overline{u_j' \theta'}) = \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$$

Für die Berechnung dieses Tensors schlägt Rogers

$$(20) \quad O_{ij} = \frac{\varepsilon}{2k} C_d \delta_{ij} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$$

vor, mit

$$(21) \quad C_d = 18 \left(1 + \frac{130}{Pe} \right)^{0,25} \left(1 + \frac{12,5}{Re_t^{0,48}} \right)^{-2,08}$$

Pe ist dabei die Péclet-Zahl und Re_t die turbulente Reynolds-Zahl. Für einfache Testfälle zeigte das Modell vielversprechende Ergebnisse. In der Düsenströmung, die einige von Rogers getroffene Annahmen verletzte, konnte jedoch keine Konvergenz erzielt werden, was daran liegt, dass die Determinante von O_{ij} im Feld einen Nulldurchgang

hat, der Tensor also nicht überall invertierbar ist.

3. NUMERIK, RECHENNETZ UND RANDBEDINGUNGEN

Für die Berechnungen wurde die Open Source Bibliothek OpenFOAM verwendet. Es wurden stationäre, dichte-basierte Simulationen im Finite-Volumen-Verfahren auf einem blockstrukturierten Netz durchgeführt.

3.1. Numerische Methoden

Da die untersuchte Düse kritisch durchströmt wird, kommt hier ein expliziter Riemann-Löser [22] zum Einsatz, der für seine guten Eigenschaften in transsonischen Strömungen bekannt ist. Die Implementierung dieses Verfahrens basiert auf der Arbeit von Oliver Borm [23]. Das Riemannproblem wird nach dem Verfahren von Roe [24] gelöst und durch den differentiellen Limiter von Venkatakrishnan [25] ergänzt. Die räumliche Diskretisierung ist dabei zweiter Ordnung. Für Turbulenz und Temperaturfluktuationen werden Upwind-Verfahren verwendet. Lokale Zeitschritte sorgen in Verbindung mit einem mehrstufigen Runge-Kutta-Verfahren für eine schnellere Konvergenz, bzw. die Erreichung eines stationären Zustandes. Temperaturleitfähigkeit und Viskosität werden durch Polynome in Abhängigkeit der Temperatur berechnet.

3.2. Vernetzung

Der Mischer besteht aus 14 radial inneren und 14 äußeren Lobes, sodass unter Symmetrieannahme lediglich ein Ausschnitt von $360^\circ/28=12,86^\circ$ simuliert werden muss. Dies ist nur bei drallfreier Anströmung des Mixers möglich, was insbesondere im Kernstrom in der Realität nicht der Fall ist. Es zeigte sich jedoch, dass sich trotz der Vereinfachung alle wichtigen Effekte im Nachlauf des Mixers beobachten lassen, sodass ein Netz generiert wurde, welches nur besagten Ausschnitt abbildet.

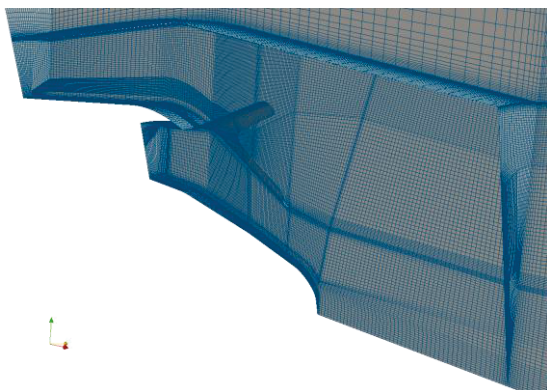


BILD 1. Blockstrukturiertes Netz

Die radiale Abmessung des Gebietes entspricht 2,5 Düsendurchmessern, der Auslass befindet sich 1,5 Düsendurchmesser hinter dem Triebwerk. Dies wird als ausreichend für Leistungs-Berechnungen erachtet, da dabei in erster Linie das Mischungsverhalten zwischen Mischer und Düsenaustritt relevant ist. Für aeroakustische Untersuchungen hingegen ist vor allem der Freistrah von

Interesse, da die hier ermittelten Turbulenzgrößen Grundlage der Modellierung von akustischen Quelltermen sind. Dazu sollte das Rechengebiet einen wesentlich größeren Teil des Freistrahls einschließen.

Da Tetraedernetze einen stark diffusiven Einfluß haben, wurde das Volumen mit ICEM-CFD rein hexaedrisch vernetzt, um eine bessere Vergleichbarkeit der beschriebenen Transportmodelle zu gewährleisten. Der erste Wandabstand wurde so gewählt, dass sich für y^+ Werte zwischen 15 und 100 ergeben, was die Verwendung von Wandfunktionen zulässt.

Insgesamt besteht das Netz aus etwa 870000 Zellen, wobei die Zelldichte zwischen Mischereintritt und Düsenaustritt am höchsten ist.

3.3. Randbedingungen

Wie bereits beschrieben wurden auf den seitlichen Rändern Symmetrien aufgeprägt. Die Einlässe von Kern- und Bypassstrom wurden mit Totaldrücken und Totaltemperaturen beaufschlagt. Turbulenzgrößen wurden hier aus dem hydraulischen Durchmesser und charakteristischen Strömungsgrößen berechnet. Im Fernfeld wurden ein statischer Druck, eine statische Temperatur und eine Machzahl von 0,8 angenommen.

Alle Wände wurden als adiabat angenommen. Die Wandfunktionen entsprechen bis auf die der Reynoldsspannungen dem OpenFOAM-Standard und können dem Quellcode entnommen werden [26]. Die Formulierung für $\overline{u'_k u'_k}$ wurde aus Fluent [27] übernommen. Dieses Modell definiert lokale Koordinatensysteme aus der Wandnormalen und der wandparallelen Strömungsrichtung und transformiert einen empirischen, anisotropen Ansatz für eine ebene Platte aus dem lokalen in das globale System. Dadurch ist bei gekrümmten Flächen eine realistischere Berechnung der Wandschubspannungen möglich, als bei einem isotropen Ansatz.

4. INTEGRALE KENNZAHLEN

Um den Einfluss der verwendeten Modelle auch quantitativ bewerten zu können, werden an dieser Stelle Kennzahlen eingeführt, anhand derer globale Aussagen über die Qualität von Düsenströmung und Mischungsvorgang möglich sind. Die Kennzahlen sind von Saegeler [27] übernommen und können je nach Triebwerkshersteller unterschiedlich definiert sein.

4.1. Durchflusskoeffizient

Der Durchflusskoeffizient wird aus dem Verhältnis vom gemessenen oder numerisch berechneten zum theoretisch erreichbaren Massenstrom gebildet. Der reale Massenstrom ist u.A. durch die Verdrängungsdicke der Grenzschicht geringer, als der ideale.

$$(22) \quad C_D = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{id}} = \frac{1}{A_\delta} \left[\left(\frac{\dot{m} \sqrt{T_T}}{Q_{id}} \right)_{Kern} + \left(\frac{\dot{m} \sqrt{T_T}}{Q_{id}} \right)_{Bypass} \right]$$

A_δ ist dabei die Fläche im Düsenaustritt und Q_{id} der ideale, reduzierte Massenstrom, welcher sich folgendermaßen berechnet

$$(23) \quad Q_{id} = \left(\frac{p_t}{p}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{R(\kappa-1)} \left(1 - \left(\frac{p_t}{p}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)}$$

Im Falle einer gesperrten Düse wird hier das kritische Druckverhältnis verwendet.

4.2. Geschwindigkeitskoeffizient

Der Geschwindigkeitskoeffizient ist das Verhältnis aus der realen und der idealen Düsenaustrittsgeschwindigkeit. Mit dem Massenstrom erweitert, kann man die folgende Beziehung für ein gemischtes Triebwerk ableiten

$$(24) \quad C_V = \frac{u}{u_{id}} = \frac{F_{B,x}}{(\dot{m} * u_{id})_{Kern} + (\dot{m} * u_{id})_{Bypass}}$$

mit

$$(25) \quad u_{id} = \sqrt{\frac{2\kappa R T_t}{\kappa-1} \left(1 - \left(\frac{p_t}{p_\infty}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)}$$

$F_{B,x}$ ist der Bruttoschub und kann über die Impulsbilanz an einem Kontrollvolumen folgendermaßen bestimmt werden

$$(26) \quad F_{B,x} = \int_{A_{Kern}} \rho u^2 dA + \int_{A_{Bypass}} \rho u^2 dA + \int_{A_{Kern}} (p - p_\infty) dA + \int_{A_{Bypass}} (p - p_\infty) dA + \int_{A_{Wände}} \sigma_x dA$$

Hierbei steht σ für die Dichte der Oberflächenkräfte aus Druck und Viskosität. Der Geschwindigkeitskoeffizient kann bei gemischten Triebwerken größer als 1 sein.

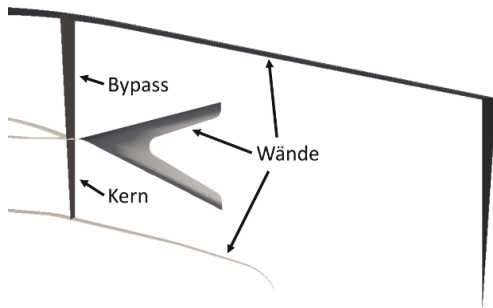


BILD 2. Kontrollvolumen und Flächen für Impulsbilanz

4.3. Schubkoeffizient

Oft wird außerdem ein Schubkoeffizient C_{Fg} definiert, der sich aus dem Produkt von C_V und C_D ergibt und somit das Verhältnis vom idealen zum realen Schub angibt.

$$(27) \quad C_{Fg} = C_V * C_D$$

4.4. Mischungsgrad

Für den Mischungsgrad wird eine Vergleichsrechnung durchgeführt, bei der der Kernstrom dieselbe Totaltemperatur am Einlass hat wie der Bypassstrom. Die Totaldrücke bleiben hierbei unverändert.

$$(28) \quad \eta_{Mix} = \frac{C_V - C_{V,kalt}}{\left(\frac{F_{B,x}}{F_{id}}\right) - \left(\frac{F_{B,x}}{F_{id}}\right)_{kalt}}$$

F_{id} wird aus der idealen Geschwindigkeit und dem idealen Massenstrom für eine Vergleichsdüse mit idealer Mischung beider Luftströme ermittelt.

5. ERGEBNISSE

5.1. Temperaturfelder

Wie eingangs bereits erwähnt, wird der turbulente Wärmetransport in gemischten Triebwerken vom EDM tendenziell eher unterschätzt. Um diesem Problem zu begegnen, ist es naheliegend die Prandtl-Zahl zu verringern und dadurch den Diffusionskoeffizienten im Fourier-Gesetz (13) zu erhöhen. Pr_t wird i.d.R. zwischen 0,7 und 1 angenommen, wobei 1 der Reynolds-Analogie von turbulentem Impuls- und Wärmetransport entspricht. Der Standardwert in Fluent ist beispielsweise 0,85.

Um auch den Einfluss einer geänderten Prandtl-Zahl zu verdeutlichen, wurden drei Simulationen für das EDM mit $Pr_t=1,0$; 0,8 und 0,6 durchgeführt und mit den Ergebnissen der Modelle von Younis und Lai verglichen.

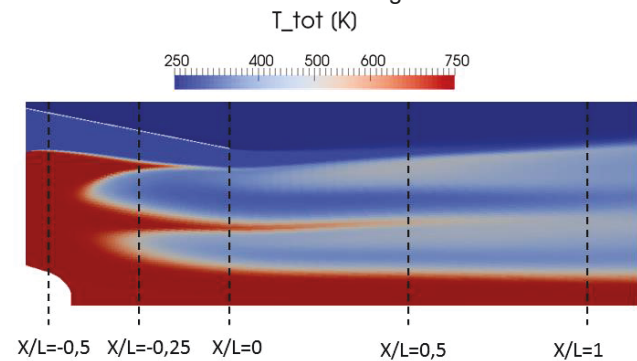


BILD 3. Totaltemperatur und Schnitt Ebenen

In Bild 3 sind die Totaltemperaturen beispielhaft für $Pr_t=0,8$ in der Symmetrieebene dargestellt, die den äußeren Lobe schneidet. Man erkennt drei Bereiche hoher thermischer Energie. Der obere entsteht durch den Wirbel, der vom äußeren Lobe generiert wird, der mittlere entsprechend durch den Wirbel des inneren Lobes. Um die Rotationsachse herum bildet sich ein Bereich aus, der von den Wirbeln weitestgehend unberührt bleibt und deshalb schlecht durchmischt wird.

Im Folgenden werden die vorgestellten Modelle in den, in Bild 3 markierten Schnitt Ebenen anhand der Totaltemperaturen bezüglich ihres Mischungsverhaltens miteinander verglichen.

Bild 4 zeigt die Totaltemperaturen in drei Ebenen senkrecht zur Rotationsachse des Triebwerks. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei im Mittelpunkt der Düsenaustrittsebene. Die X-Achse zeigt in Strömungsrichtung. Die Ebene für $X/L=-0,5$ befindet sich kurz hinter dem Mischer.

Die Temperaturen unterscheiden sich bei $X/L=-0,5$ kaum voneinander, da der Mischungsprozess hier gerade erst begonnen hat. In der zweiten Ebene zeigen sich erste minimale Unterschiede für die drei EDM-Rechnungen. Das Modell von Younis liefert hier hingegen schon deutlich reduzierte Temperaturen, was auf einen stärkeren Wärmetransport zwischen Kern- und Nebenstrom hinweist. Das DSM liegt in seiner Ausmischung zwischen dem EDM bei einer turbulenten Prandtl-Zahl von 0,8 und 1,0. In der dritten Ebene wird die starke Durchmischung des Younis-Modells noch deutlicher. Auch der Einfluss niedrigerer Prandtl-Zahlen tritt nun klarer in Erscheinung. Das DSM scheint nun im Bereich des unteren Wirbels etwas stärker zu mischen, als das EDM mit $Pr_t=0,8$.

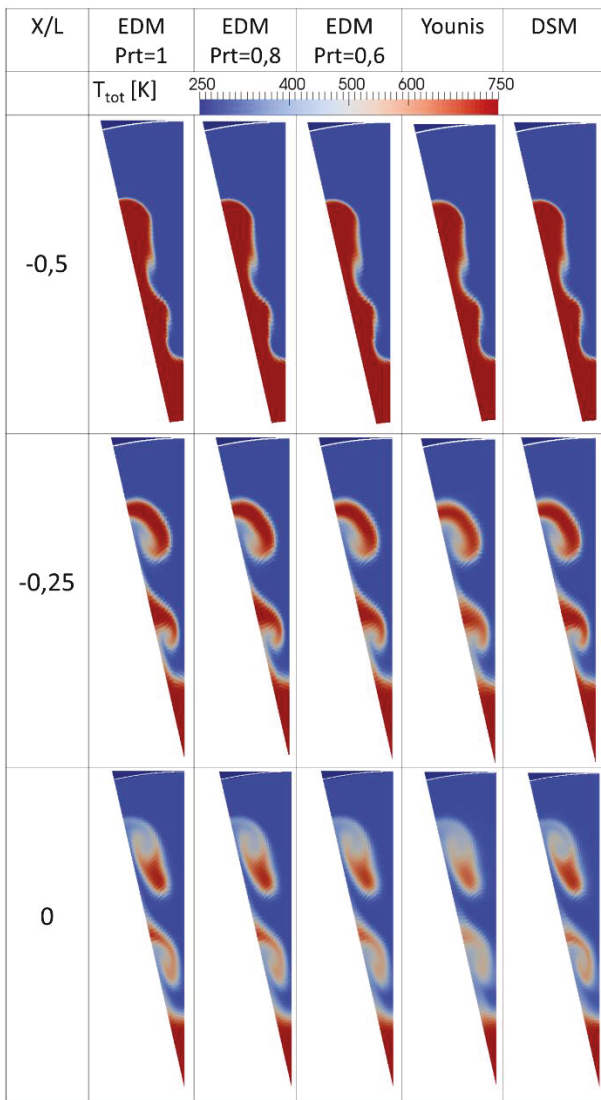


BILD 4. Mischungsvorgang zwischen Mischer und Düsenaustritt

Der bisher betrachtete Bereich ist vor allem für Aussagen über die Triebwerksleistung relevant. Im Folgenden soll auch der düsennahe Freistrahel betrachtet werden, um das Verhalten der Modelle bezüglich der Lärmerzeugung abzuschätzen.

In Bild 5 sind die entsprechenden Ebene für $X/L=0,5$ bzw. $X/L=1$ hinter dem Düsenaustritt dargestellt.

Anhand des tropfenförmigen Temperaturmaximums in der Mitte kann man in der ersten Reihe gut erkennen, dass das Younis-Modell nach wie vor die niedrigsten Werte für T_{tot} liefert. Das differentielle Modell liegt nun etwa zwischen den Ergebnissen für $Pr_t=0,8$ und $Pr_t=0,6$. Bei $X/L=1$ wird deutlich, dass dem DSM grundsätzlich komplexere Transportmechanismen zugrunde liegen, als dem EDM. Im oberen Wirbel zeigen sich ein Maximum, das mit dem des EDM für $Pr_t=1,0$ vergleichbar ist, während der untere Teil deutlich stärker durchmischt wird. Auch das aufwändigere algebraische Modell nach Younis mischt im Vergleich dazu überall gleichmäßig stark.

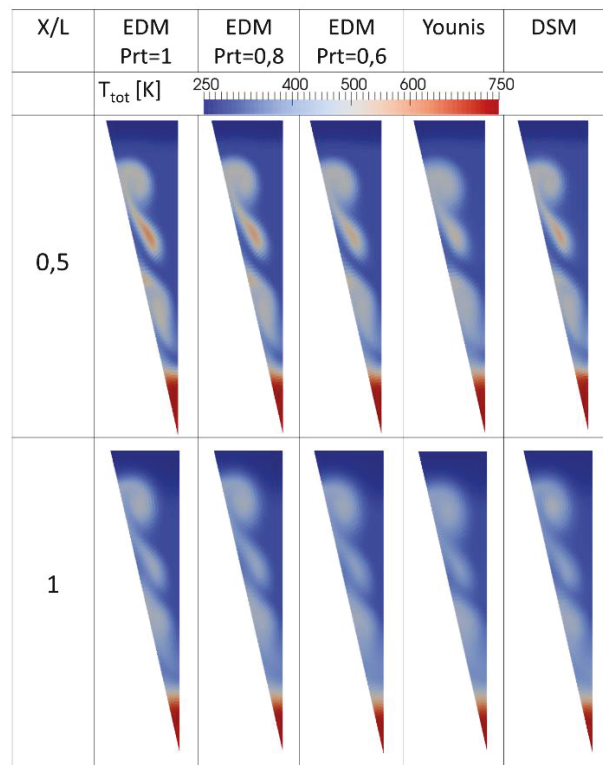


BILD 5. Mischungsvorgang hinter der Düse

Sowohl das DSM, als auch das Modell nach Younis liefern an der äußeren Düsenwand, also dem Bereich der Interaktion von Wand und kalter Außenströmung, unerwartet hohe Temperaturen von über 300K bei einer Außentemperatur von 226K. Da dieser Bereich für die Düsenkoeffizienten irrelevant ist und auch der Freistrahel im Vergleich zum EDM keine höheren Temperaturen im Bereich der Hinterkante aufwies, wurden keine Veränderungen am Modell oder den Randbedingungen vorgenommen.

5.2. Transportmechanismen

Da im Younis-Modell alle Terme den Temperaturgradienten enthalten und die Temperaturfluktuation somit stark von diesem abhängen, ähneln die Ergebnisse denen der EDM Rechnungen bei niedrigen Prandtl-Zahlen. Im Gegensatz dazu liefert das differentielle Modell einen deutlichen Unterschied. Durch den konvektiven und den diffusiven Term in der Transportgleichung werden nicht nur in unmittelbarer Nähe hoher Temperaturgradienten hohe Temperaturfluktuationen erreicht.

Dies wird in Bild 6 deutlich. Die höchsten Werte für den Betrag von $\overline{u_i' \theta'}$ sind im oberen Bild zwischen Mischer und Düsenaustritt, also dem Bereich, in dem das Younis-Modell besonders stark mischt, zu erkennen. Weil sich die Scherschicht gerade erst ausbildet und daher sehr dünn ist, liegen hier die größten Temperaturgradienten vor. Das DSM berechnet an dieser Stelle ein wesentlich niedrigeres Maximum. Auch im Freistrahel beschränkt sich die Temperaturturbulenz beim algebraischen Ansatz auf schmale Bereiche um die Scherschichten zwischen heißem und kaltem Strom, also auf Orte extremer Temperaturunterschiede. Beim DSM finden sich auch

höhere Werte in Gebieten mit mäßigen Temperaturunterschieden. Ein besonders großes Gebiet liegt hier zwischen dem unteren Wirbel und dem heißen Kernstrom. Dieses ist für die zuvor beschriebene hohe Durchmischung im mittleren Bereich bei $X/L=0$ verantwortlich. Es führt außerdem dazu, dass das DSM am Auslass der Domain sogar eine niedrigere Maximaltemperatur liefert als das Younis-Modell.

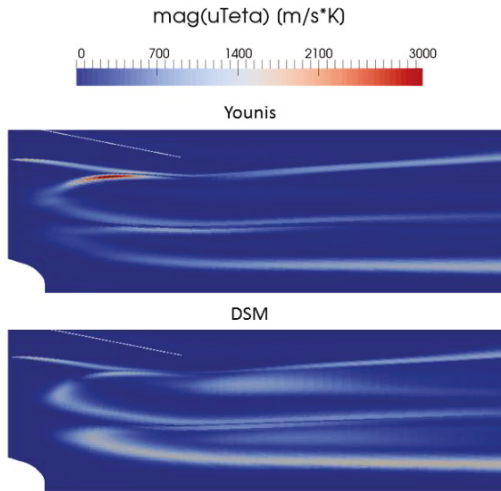


BILD 6. Temperaturfluktuationen

Insgesamt wird deutlich, dass die algebraischen Ansätze den turbulenten Wärmetransport stark vereinfachen. Das Dilemma dabei ist, dass Modellkonstanten wie die Prandtl-Zahl zwar beispielsweise so kalibriert werden können, dass die Durchmischung im Düsenaustritt mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmen, dies aber prinzipiell den Ort der maximalen Durchmischung nur weiter stromauf verschiebt, weil die einflussreichen Temperaturgradienten dadurch früher abgebaut werden. Das Lösen einer Transportgleichung liefert hier einen universelleren Ansatz, auch wenn die verwendete Variante das Problem der zu geringen Durchmischung bis zum Düsenaustritt offenbar nicht löst.

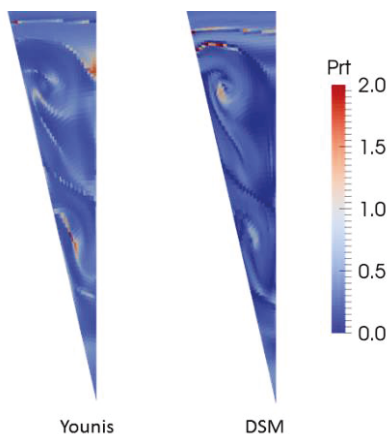


BILD 7. Turbulente Prandtl-Zahl bei $X/D=0,5$

Das EDM-Modell beruht, wie bereits erwähnt, auf der Annahme einer konstanten Prandtl-Zahl. Setzt man die Ansätze für den turbulenten Wärmetransport des EDM gleich dem der beiden anderen Modelle (Gleichung (12) und (13)), so kann man die Gleichung unter Verwendung der Beträge vektorieller Größen nach Pr_t auflösen. In Bild 7 wurde die so entstandene Beziehung auf das Modell nach

Younis und auf den differentiellen Ansatz angewandt. Da der Betrag des Temperaturgradienten null sein kann, ergeben sich dabei teilweise unphysikalische Extrema, die hier nicht weiter beachtet werden sollen. Grundsätzlich kann man feststellen, dass die Prandtl-Zahl bei beiden Modellen auch in größerem Abstand zu den genannten Extrema deutlich variiert.

Anders als man zunächst erwarten würde, scheinen die Prandtl-Zahlen insgesamt beim DSM niedriger zu sein. Bei genauerer Betrachtung fallen jedoch deutliche Unterschiede auf, die dieses Verhalten erklären können. Zunächst entspricht die Beobachtung, dass die Werte in Abwesenheit großer Temperaturgradienten, und damit im größten Teil der Ausschnitte, niedriger sind als bei Younis, der Tatsache, dass die Fluktuationen hier beim differentiellen Modell größer sind (Bild 6). Betrachtet man die Orte maximaler Temperaturen, liefert das Younis-Modell große Prandtl-Zahlen, da der Temperaturgradient hier sehr klein ist. Das DSM errechnet im Gegensatz dazu sehr kleine Prandtl-Zahlen. In direkter Nachbarschaft dieser Bereiche, also in Anwesenheit hoher Temperaturgradienten, sind wiederum die Prandtl-Zahlen des Younis-Modells niedriger, was die höhere Durchmischung begründet.

Eine weitere interessante Beobachtung beim differentiellen Modell sind die hohen Werte im Kern des äußeren Wirbels, die zu den vergleichsweise hohen Temperaturen in diesem Bereich führen. Es wird vermutet, dass diese durch die Zentrifugalkräfte entstehen, die einer Durchmischung entgegenwirken, da Fluidelemente höherer Dichte, also niedrigerer Temperatur nach außen transportiert werden.

5.3. Kennzahlen

Um den Einfluss der verschiedenen Transportmodelle auf die Düsenströmung eines gemischten Triebwerks zu untersuchen, werden an dieser Stelle die in Abschnitt 4 vorgestellten düsen- bzw. mischercharakteristischen Größen für alle Ansätze ausgewertet und miteinander verglichen.

Anhand der Totaltemperaturfelder am Düsenaustritt in Bild 4 ist bereits deutlich geworden, dass das Younis-Modell in dem für die Triebwerksperformance relevanten Bereich am stärksten mischt. Es folgt das EDM mit niedrigen Prandtl-Zahlen. Die geringste Durchmischung liegt bei $Pr_t=1,0$ vor, wobei das DSM nur geringfügig stärker mischt. Bild 8 zeigt die entsprechenden Werte für den Mischungsgrad. Der Verlauf der EDM-Rechnungen zeigt ein nahezu lineares Verhalten, sodass angenommen wird, dass eine turbulente Prandtl-Zahl von etwa 0,4 eine ähnlich starke Ausmischung wie beim Younis-Modell zur Folge hätte.

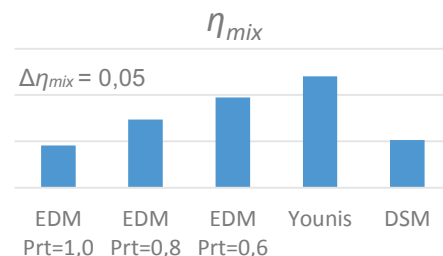


BILD 8. Mischungsgrad

Wie bei der Definition der Kennzahlen bereits angedeutet,

steigt der Geschwindigkeitskoeffizient bei gemischten Triebwerken mit dem Mischungsgrad und kann Werte annehmen die größer als eins sind. Dies liegt daran, dass der verlustbehaftete Bruttoschub durch die Mischung größer sein kann, als die Summe der idealen Einzelschübe von Kern- und Nebenstrom. Aus diesem Grund zeigt sich für die Geschwindigkeitskoeffizienten ein sehr ähnliches Bild wie für η_{mix} .

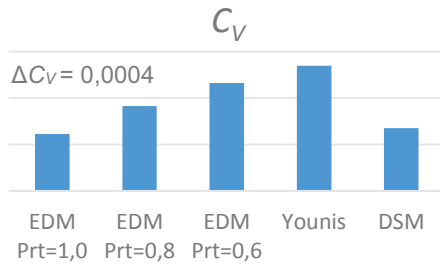


BILD 9. Geschwindigkeitskoeffizienten

Der Durchflusskoeffizient hingegen verhält sich reziprok zum Mischungsgrad, so dass der niedrigste Wert beim Modell nach Younis berechnet wird. Der Einfluss des Modells ist hier außerdem fast viermal so groß. Während C_V für das Younis-Modell etwa 0,03% über dem Wert des EDM mit $P_r=0,8$ liegt, ist der entsprechende Unterschied für C_D gleich -0,11%. Die Abnahme des Durchflusskoeffizienten bei Modellen, die stärker mischen, wurde auch von Saegeler [10] beobachtet und wird auf die gesteigerte Entropieproduktion bei stärkerer Ausmischung zurückgeführt. Derselbe Effekt zeigt sich bei einer Variation des Totaltemperaturverhältnisses: wird die Temperatur im Kernstrom und damit der Mischungsgrad erhöht, so sinkt der Durchflusskoeffizient.

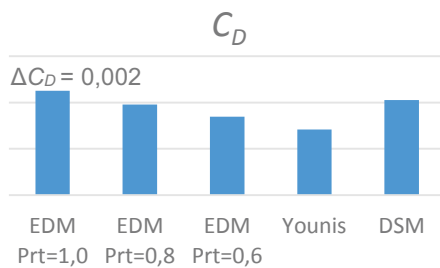


BILD 10. Durchflusskoeffizienten

Der Schubkoeffizient wird dementsprechend stärker vom Durchfluss- als vom Geschwindigkeitskoeffizienten beeinflusst, sodass die Verläufe in Bild 10 und Bild 11 einander ähneln.

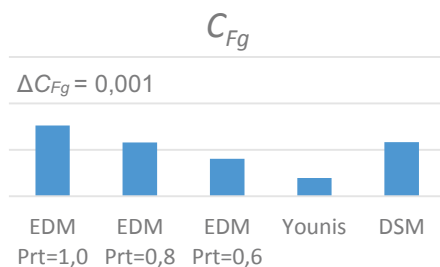


BILD 11. Schubkoeffizienten

Für Leistungs-Betrachtungen bedeutet die Abnahme des Schubkoeffizienten mit dem Grad der Durchmischung, dass sich der erhoffte Schubgewinn durch eine stärkere Durchmischung verringert. Eine sorgfältige Optimierung ist daher nötig [19].

6. SCHLUSSFOLGERUNG UND AUSBLICK

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung verschiedener Ansätze zur Schließung des turbulenten Wärmetransports anhand der Durchmischung von Kern- und Nebenstrom in gemischten Turbofantriebwerken.

Hierzu wurden aufbauend auf einem Reynolds-spannungsmodell das standardmäßige EDM bei drei verschiedenen turbulenten Prandtl-Zahlen mit einem komplexeren algebraischen und einem differentiellen Ansatz verglichen.

Das algebraische Modell wurde so konzipiert, dass es bei deutlich geringerem Rechenaufwand das Verhalten einer zusätzlichen Transportgleichung möglichst gut annähern soll.

Bei der Durchmischung zeigte sich, dass das Younis-Modell zwischen Mischer und Düsenaustritt noch stärker mischt, als das EDM mit sehr niedriger Prandtl-Zahl (0,6), während das differentielle Modell im Bereich des EDM mit $P_r=1,0$ rangiert. Interessant ist das Verhalten des DSM im Freistrah, da es mit zunehmendem Abstand von der Düse im Vergleich zu den anderen Modellen immer stärker mischt. Dieses Verhalten wird darauf zurückgeführt, dass die algebraischen Modelle sehr stark an den Temperaturgradienten gekoppelt sind, während das DSM die Temperaturschwankungen auch konvektiv und diffusiv transportiert. Da alle Modelle bestrebt sind die Gradienten abzubauen, führt dies bei den algebraischen Schließungsansätzen stromab zu einer schnellen Abnahme des Wärmetransports. Hierbei zeigt sich, dass der Versuch, das Verhalten einer Transportgleichung durch einen expliziten Ausdruck nachzubilden, in diesem Fall offensichtlich schwer möglich ist. Da die Unterschiede mit größerem Abstand zum Mischer zunehmen, ist davon auszugehen, dass das DSM besonders für Lärmprognosen, bei denen große Teile des Freistrahls simuliert werden müssen, interessante Ergebnisse liefert.

Des Weiteren wurde gezeigt, dass sowohl Younis, als auch DSM, keineswegs konstante Prandtl-Zahlen aufweisen, was eine grundsätzliche Annahme des EDM für die betrachtete Strömung widerlegt.

Da keines der Modelle den eingangs erwähnten Effekt starker Helmholtz-Instabilitäten bei großen Dichtegradienten berücksichtigt, wäre ein Korrekturverfahren, das zu verstärkter Turbulenz in diesen Bereichen führt eine sinnvolle Erweiterung um experimentellen Daten bezüglich der Durchmischung näher zu kommen.

7. DANKSAGUNG

Diese Arbeit ist im Rahmen eines Munich Aerospace Stipendiums entstanden, welches durch die MTU Aero Engines AG finanziert wird. Dank gilt der MTU ebenfalls für die fachliche Unterstützung und die Bereitstellung der Geometrie.

8. LITERATUR

- [1] H. Pearson, „Mixing of Exhaust and By-pass Flow in By-pass Engine“, Rolls Royce Ltd. (Technical Notes), 1962.
- [2] T.H. Frost, „Practical Bypass Mixing Systems for Fan Jet Aero Engines“, The Aeronautical Quarterly, S. 141-159, 1966.
- [3] M.J. Lighthill, „On Sound Generated Aerodynamically“, „General Theory I“ und „Turbulence as a Source of Sound II“, Proc. Roy. Soc A221, 1951.
- [4] D.C. Wilcox, „Turbulence Modelling for CFD“, DCW Industries, zweite Auflage, 1998.
- [5] W.A. Engblom, A. Khavaran, J. Bridges, „Numerical Prediction of Chevron Nozzle Noise Reduction using WIND-MGBK Methodology“, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA Paper No. 2001-2979, 2001.
- [6] L.D. Koch, J. Bridges, „Flow Field Comparisons From Three Navier-Stokes Solvers for an Axisymmetric Separate Flow Jet“, 40th Aerospace Science Meeting and Exhibit, AIAA Paper No. 2002-0672, 2002.
- [7] A.T. Thies, C.K.W. Tam, „Computation of Turbulent Axisymmetric and Nonaxisymmetric Jet Flows using the $k-\epsilon$ Model“, AIAA Journal Vol. 34, No. 2, S. 309-316, 1996.
- [8] C.K.W. Tam, A. Ganesan, „Modified $k-\epsilon$ -Turbulence Model for Calculating Hot Jet Mean Flows and Noise“, AIAA Journal Vol. 42, No. 1, S. 26-34, 2004.
- [9] K.S. Abdol-Hamid, S.P. Pao, S.J. Massey, A. Elmiligui, „Temperature Corrected Turbulence Model for High Temperature Jet Flow“, Journal of Fluids Engineering Vol. 126, S. 844-850, 2004.
- [10] S. Saegeler, J. Lieser, Ch. Mundt, „Improved Modelling of Vortical Mixing for the Simulation of Efficient Propulsion Systems“. for. 28th International Congress of the Aeronautical Sciences, Brisbane, Australien, 2012.
- [11] A.J. Reynolds, „The variation of turbulent Prandtl and Schmidt numbers in wakes and jets“, Int. Jour. of Heat and Mass Transfer Vol. 19, S. 757-764, 1975.
- [12] K. Bremhorst, K. J. Bullock, „Spectral Measurements of Temperature and Longitudinal Velocity Fluctuations in Fully Developed Pipe Flow“, Int. Jour. of Heat and Mass Transfer Vol. 13, S. 1313–1329, 1970.
- [13] S. Saegeler, Ch. Mundt, „Advanced Numerical Simulation of Mixing Hot Core and Cold Bypass Flow in Modern Propulsion Systems with Internal Lobed Forced Mixer“, 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, San Diego, USA, AIAA-2013-2424, 2013.
- [14] B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi, „Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure“, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, Pt.3 S. 537-566, 1974.
- [15] M.M. Gibson and B.E. Launder, Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. Journal of Fluid Mechanics, 86, S. 491-511, 1978.
- [16] B.A. Younis, C.G. Speziale, and T.T. Clark, „A rational model for the turbulent scalar fluxes“, Proc. R. Soc., 461, S. 575–594, 2005.
- [17] B.A. Younis, B. Weigand, and S. Spring, „An explicit algebraic model for turbulent heat transfer in wall-bounded flow with streamline curvature“, Jour. of Heat Transfer, 129, S. 425–433, Apr. 2007.
- [18] M.M. Rogers, N.N. Mansour, W.C. Reynolds, „An algebraic model for the turbulent flux of a passive scalar“, J. Fluid Mech., Vol. 203 S. 77–101, 1989.
- [19] Ch. Mundt, J. Lieser, „Performance improvement of propulsion systems by optimization of the mixing efficiency and pressure loss of forced mixers“, 8. CEAS European Propulsion Forum, Nottingham, 2001.
- [20] Y.G. Lai, R.M.C. So, „Near-Wall Modeling of Turbulent Heat Closures“, Int. Jour. of Heat and Mass Transfer Vol. 33(7), S. 1429–1440, 1999.
- [21] R.W. Johnson, „Handbook of Fluid Dynamics“ 1st Edition, Springer-Verlag, 1998.
- [22] E.F. Toro, „Riemann-Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics“, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1999.
- [23] O. Borm, „Instationäre numerische Untersuchung der aerodynamischen Rotor-Stator-Interaktion an einem Radialverdichter“, Dissertation, TU München, 2012.
- [24] P.L. Roe, „Approximate Riemann Solvers, Parametric Vectors, and Difference Schemes“, Journal of Computational Physics 43, S. 357–372, 1981.
- [25] V. Venkatakrishnan. „On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solutions“, AIAA Paper 93-0880, 1993.
- [26] OpenFOAM Quellcode, <http://www.openfoam.org/docs/cpp/>
- [27] Fluent 15.0 Theory Guide, <http://148.204.81.206/Ansys/150/ANSYS%20Fluent%20Theory%20Guide.pdf>
- [28] S. Saegeler, „Verbesserung der numerischen Simulation der Mischung von Triebwerksstrahlen“, Dissertation, UniBW München, 2013.