# IDENTIFIKATION EINER REGELGRÖßE ZUR AKTIVEN STRÖMUNGSKONTROLLE AN EINER LINEAREN VERDICHTERKASKADE IM KOMPRESSIBLEN MACHZAHLBEREICH

C. Tiedemann & D. Peitsch, Fachgebiet Luftfahrtantriebe, Institut für Luft- und Raumfahrt
Technische Universität Berlin, Marchstr. 12-14, 10587 Berlin, Deutschland

S. Steinberg & R. King, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik, Institut für Prozess- und Verfahrenstechnik
Technische Universität Berlin, Hardenbergstr. 36a, 10623 Berlin, Deutschland

## Zusammenfassung

Ein linearer Kaskadenprüfstand mit hochbelasteten Verdichterstatoren zur Untersuchung von Methoden aktiver Strömungskontrolle für den kompressiblen Machzahlbereich wurde am Fachgebiet Luftfahrtantriebe der Technischen Universität Berlin aufgebaut. Die verwendeten CDA-Profile (controlled diffusion airfoils) wurden für hohe Zuström-Machzahlen und realistische Reynolds-Zahlen ausgelegt. Die hohe Belastung der Verdichterschaufeln ergibt sich aus einem sehr großen Umlenkungswinkel von $55°$.
Mit Hilfe von Ölanstrichbildern wurde die Strömungstopologie auf den Oberflächen des Schaufelprofils visualisiert. Des Weiteren wurden Nachlaufmessungen mit Hilfe einer Fünflochsonde durchgeführt. Die Kaskadenströmung weist im unbeeinflussten Fall starke dreidimensionale Strömungsphänomene auf, die zu erheblichen Verlusten führen und die Verdichterstabilität negativ beeinflussen. In weitergehenden Experimenten werden an der Kaskade die Möglichkeiten untersucht, mit Hilfe aktiven Einblasens von Luft unter Einsatz eines geschlossenen Regelkreises diese Phänomene soweit wie möglich zu reduzieren bzw. zu unterdrücken.
Zu diesem Zweck wurde zunächst ein Aktuationsregelkreis zur Erzielung einer symmetrischen Einblasung aufgebaut. Zur Identifikation einer geeigneten Regelgröße für die Kaskadenströmung wurde eine Messschaufel im Bereich des linken Eckenwirbels mit $16$ hochauflösenden Drucksensoren ausgestattet. Über den Aktuationsregelkreis wurde die Kaskadenströmung manipuliert, hierbei wurde zunächst eine sinusförmige Anregung angewendet. Über die Druckaufnehmer in der Messschaufel wurde der Einfluss der Aktuation aufgezeichnet. Mit Hilfe einer Hauptkomponentenanalyse der $16$ Sensorsignale konnte anschließend eine geeignete Regelgröße ermittelt und physikalisch interpretiert werden.

## 1 EINLEITUNG

Luftfahrzeughersteller und Fluggesellschaften stellen immer höhere Anforderungen an zukünftige Antriebe bezüglich Wirtschaftlichkeit und Umweltverträglichkeit. Dieses Ziel erfordert Turbokomponenten, deren Länge und Gewicht möglichst weit reduziert werden muss. Im Verdichter-Modul kann die Anzahl der erforderlichen Stufen durch ein höheres Stufendruckverhältnis bei konstantem Totaldruckverhältnis minimiert werden. Dies kann durch eine stärkere Umlenkung der Strömung innerhalb der Passage eines überkritischen Verdichtergitters erreicht werden. Dennoch muss Ablösung aus Gründen der Verdichterstabilität zwingend vermieden werden. Ein Ansatz zur Reduzierung von Ablösegebieten ist die aktive Strömungskontrolle.
Mit Hilfe von kontrolliertem, stationärem oder gepulstem Ausblasen von Druckluft durch Seitenwandschlitze sollen die Möglichkeiten untersucht werden, die Ablösegebiete auf der Schaufelsaugseite eines linearen Kaskadenprüfstandes mit hoch belasteten Verdichterstatoren soweit wie möglich zu reduzieren bzw. zu unterdrücken. So kann die Effizienz der Kaskade gesteigert werden, indem die statische Druckerhöhung über die Beschaufelung maximiert bzw. die Totaldruckverluste minimiert werden.
Es wird zwischen zwei Kontrollstrategien unterschieden, einerseits dem Stimulieren von kohärenten Strukturen und andererseits dem Erhöhen der turbulenten Vermischung [6]. Erstgenannte Methode erscheint vielversprechender als die Erhöhung der Turbulenz durch Zuführen von energiereicher Luft in ablösegefährdeten Gebieten. Dazu müssen jedoch geeignete Ausblasfrequenzen gefunden werden, um eine Anregung der kohärenten Strukturen zu ermöglichen, was nicht immer umsetzbar ist. Diese Frequenzen entsprechen im Allgemeinen den Wirbelablösefrequenzen der Strukturen im Ablösegebiet und liegen bei hohen Anströmgeschwindigkeiten in der Größenordnung von $10^3$ Hz. Ausblasen von Druckluft mit ungünstig gewählten Frequenzen kann statt zu einer Anfachung der kohärenten Strukturen zu einer Verschlechterung der Performance führen. Daher ist eine detaillierte Parameterstudie zur Ermittlung geeigneter Ausblasparameter erforderlich.
Wurden geeignete Parameter gefunden, ist eine Möglichkeit der weiteren Verbesserung der aktiven Strömungskontrolle die Verwendung eines geschlossenen Regelkreises [2]. Hierzu muss eine Regelgröße identifiziert werden, die den Einfluss der Anregung durch die aktive Strömungskontrolle auf die komplexe dreidimensionale Strömung widerspiegelt [9], [10].

Im folgenden Kapitel wird der Prüfstand sowie dessen Ausstattung hinsichtlich Aktuatorik und Sensorik vorgestellt. Anschließend wird kurz auf die Notwendigkeit und die Umsetzung eines Aktuationsregelkreises eingegangen. In Kapitel 3 werden die Effekte der Aktuation anhand von Ölanstrichbildern und Nachlaufmessungen diskutiert. Um die positiven Effekte der Aktuation auch

unter Vorhandensein von Störungen zu gewährleisten, ist eine entsprechende Regelung der Passagenströmung notwendig. Zu diesem Zweck ist eine geeignete, die Effekte der Aktuation repräsentierende Regelgröße zu identifizieren. Hierzu wird eine in Kapitel 4 beschriebene Hauptkomponentenanalyse geeignet gewichteter Messdaten durchgeführt. Abschließend wird der praktische Nutzen der Hauptkomponenten anhand entsprechender Versuchsergebnisse erörtert.

## 2 VERSUCHSAUFBAU

Der für die Untersuchungen verwendete Prüfstand wurde in Anlehnung an die Arbeiten von Zander et al. [11] für den kompressiblen Machzahlbereich ausgelegt.

### 2.1 Der Windkanal

Es handelt sich bei dem Windkanal um eine offene Konstruktion. Die Strömung wird über zwei parallel geschaltete Radialverdichter bereitgestellt. Eine nachgeschaltete Wasserkühlung sorgt für eine Totaltemperatur der Zuströmung von $T_{t0} = 50°\mathrm{C}$. In Bild 1 ist der Windkanal mit seinen Einbauten zur Strömungsgleichrichtung als 3D-Modell dargestellt. In der Beruhigungskammer befinden sich Durchlässe zur Zuführung von Seeding bei Verwendung von laseroptischen Messverfahren und Durchführungen für Sonden. Hier wird mit Hilfe einer Pitotsonde der Totaldruck der Zuströmung sowie mittels eines Temperaturfühlers (Pt100) die Totaltemperatur erfasst. Die Düse stellt den Übergang des Windkanals zur Messstrecke dar, deren Kontur von einem runden auf einen rechteckigen Querschnitt überleitet.
Der experimentell ermittelte Turbulenzgrad in Strömungsrichtung am Messtreckeneintritt beträgt $Tu \approx 0.01$.

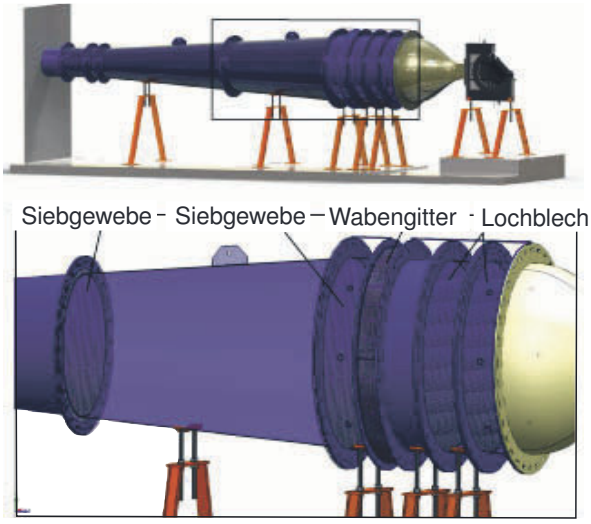



BILD 1: a) Windkanal der TU Berlin, b) Darstellung der Einbauten

### 2.2 Die Verdichterkaskade

Das Verdichterschaufelprofil wurde mit Hilfe des Gitterberechnungsverfahrens *Mises* für eine Zuströmmachzahl von $M = 0.75$ bei einer Reynoldszahl von $Re = 1.1 \cdot 10^6$ bezogen auf die Sehnenlänge $c$ ausgelegt. Es handelt sich um ein Controlled Diffusion Airfoil (CDA) mit einer Sehnenlänge von $c = 80\ \mathrm{mm}$ bei einem Schaufelhöhenverhältnis von $s/c = 0.8$, mit der Schaufelhöhe $s$. Das Teilungsverhältnis beträgt $t/c = 0.5$, das maximale Dickenverhältnis $t_m/c = 0.06$. Die Auslegungsparameter der Verdichterkaskade sind in Tabelle 1 aufgelistet. Die Verdichterstatoren besitzen eine elliptische Vorderkante und einen Umlenkungswinkel von $\beta = 55°$ sowie einen Staffelungswinkel von $\gamma = 20°$. Die Auslegungsinzidenz beträgt $i = 0°$.
Der lineare Kaskadenprüfstand besteht aus sieben Schaufeln, die durch Tailboards begrenzt werden. Diese sind auf einer Drehscheibe angebracht, um eine Inzidenzvariation von $\pm 10°$ vornehmen zu können. Die obere und untere Kontur der Zuströmung werden entsprechend des Anstellwinkels angepasst.

| Parameter | Variable | Wert | Einheit |
|---|---|---|---|
| Grenzschichtdicke | $\delta/s$ | 6 | % |
| Machzahl | $M$ | 0.75 | – |
| Reynoldszahl | $Re$ | $1.1 \cdot 10^6$ | – |
| Turbulenzgrad | $Tu$ | 0.01 | – |
| Schaufelhöhenverhältnis | $s/c$ | 0.8 | – |
| Teilungsverhältnis | $t/c$ | 0.5 | – |
| Dickenverhältnis | $t_m/c$ | 0.06 | – |
| Staffelungswinkel | $\gamma$ | 20 | ° |
| Umlenkungswinkel | $\beta$ | 55 | ° |

TAB 1: Auslegungsparameter

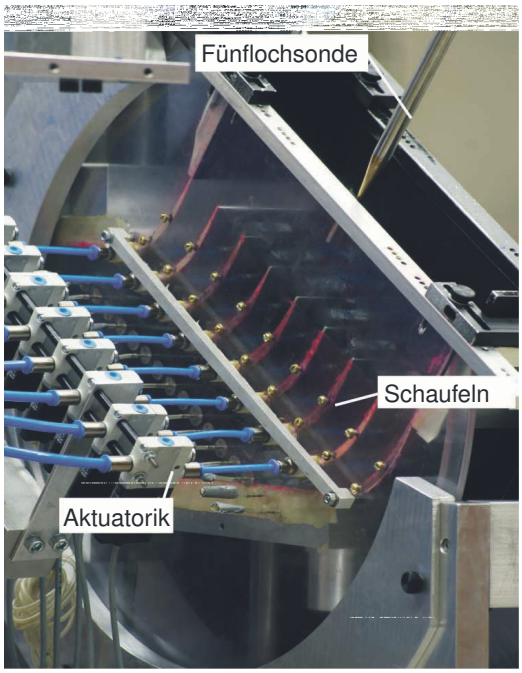



BILD 2: Verdichterkaskade der TU Berlin

Um die Gleichmäßigkeit der Anströmung überwachen zu können, wird die statische Druckverteilung im Zulauf mittels statischer Druckbohrungen eine halbe Sehnenlänge vor der Beschaufelung aufgezeichnet. Bei Bedarf kann eine Grenzschichtabsaugung zur Vergleichmäßigung der Anströmbedingungen zugeschaltet werden. Für die Anwendung von

optischen Messverfahren ist die Drehscheibe auf einer Seite der Kaskade als Polycarbonat-Fenster ausgeführt. Die Schaufeln sind schwarz eloxiert, um einen guten Kontrast für Ölanstrichbilder und eine Verminderung von Reflexionen bei laseroptischen Messungen zu gewährleisten. Für die Untersuchungen der Passagenströmung kann die mittlere Schaufel durch eine Sensorik-Schaufel ausgetauscht werden. Diese ist mit $16$ integrierten, zur Schaufelsaugseite gewandten, hochauflösenden Miniaturdruckaufnehmer bestückt. Eine detaillierte Beschreibung der Sensorik-Schaufel befindet sich im folgenden Unterkapitel.
Abbildung 2 zeigt die Verdichterkaskade mit angeschlossenem Aktuatorsystem. Dieses wird im Folgenden beschrieben.

### 2.3 Auslegung der Aktuatorik und Sensorik

In der vorliegenden Arbeit wurde der Einfluss konstanter Aktuation durch in die Seitenwand integrierte Ausblasöffnungen auf die Passagenströmung untersucht. Das übergeordnete Ziel hierbei ist die Reduzierung der Eckenwirbel und der damit verbundenen Verluste zur Verbesserung der Schaufelumströmung. Dazu werden austauschbare Einsätze in beide Seitenwände eingebracht um eine hohe Flexibilität der Ausblasgeometrien zu erreichen.
Die über einen Schraubenverdichter (*Kaeser, Typ ESD 351,* $14\ \mathrm{bar}, 0.41\ \mathrm{kg/s}$) bereitgestellte Druckluft gelangt in einen Druckspeicher mit einem Volumen von $2\ \mathrm{m}^3$. Von dort wird die Luft über ein Leitungssystem dem Aktuatorsystem zugeführt. Der Massenstrom wird indirekt über ein Durchflussmessgerät (*Newport OMEGA, FMA 2600*) mit einer Genauigkeit von $\pm 1\ \%$ relativ zum maximalen Volumenstrom von $1500\ \mathrm{sl/min}$ erfasst. Anschließend wird die Luft in einen Beruhigungsbehälter mit einem Volumen von $4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$ geleitet, um die von nachfolgenden Ventilen erzeugten, die Massenstrommessung beeinflussenden Druckschwingungen zu dämpfen. Von hier gelangt die Luft über zwei Proportionalwegeventile (*Festo, MPYE*) in zwei Verteilerdosen mit einem Volumen von je $1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$. Über die Proportionalwegeventile ist das Druckniveau der Verteilerdosen bzw. der Massendurchfluss und somit die Amplitude der Einblasung individuell einstellbar. Die Verteilerdosen sind über jeweils $8$ Magnetschaltventile des Typs *Festo, MHE2* mit den Ausblasöffnungen in den Seitenwänden der Kaskade gekoppelt. Die resultierende Ausblasgeometrie besitzt einen elliptischen Querschnitt bedingt durch einen Ausblaswinkel von $20^\circ$ zwischen Düsenaustrittsebene und Seitenwand. Die eingeblasene Druckluft strömt tangential zur Schaufeloberfläche bei einer Ausblasposition von $10\%\ c$ aus. Eine schematische Darstellung des Aktuatorsystems ist in Bild 3 dargestellt. Zur Erzielung einer symmetrischen Einblasung wird zunächst ein Aktuationsregelkreis (siehe 2.4) aufgebaut, welcher definierte Aktuationsmassenströme einregelt. Die Drücke im Beruhigungsbehälter sowie in den Verteilerdosen werden über Drucktransmitter der Fa. *Bell&Howell* mit einem Messbereich von $0 - 5\ \mathrm{bar}$ bei einem Messfehler von $1\%$ FSO (Full Scale Output, max. Messwert) ermittelt. Zur Identifikation einer geeigneten Regelgröße der Kaskadenregelung wird eine sogenannte Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA) durchgeführt. Dazu wird eine Messschaufel mit $16$ hochauflösenden Drucksensoren (*Kulite, XCQ-062*) ausgestattet, die einen Messfehler von $\pm 0.5\%$ FSO bei einem maximalen Messbereich von $\pm 1.7\ \mathrm{bar}$ aufweisen. Die Drucksensoren befinden auf der Saugseite der mittleren Kaskadenschaufel. Diese sind im Bereich des linken Eckenwirbels zufällig verteilt angeordnet. Eine 3D-Darstellung der Schaufel mit Einblaseinsatz ist in Bild 4 dargestellt.

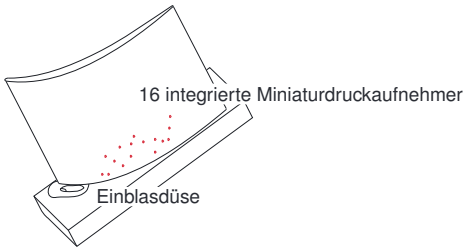



BILD 4: Schaufel mit integrierten Druckaufnahmern

### 2.4 Aktuationsregelkreis

Die Aufgabe des Aktuationsregelkreises besteht darin, einen definierten, symmetrischen und reproduzierbaren Aktuationsmassenstrom auch bei Anwesenheit von Störungen bereitzustellen. Gemessen werden die Drücke im Beruhigungsbehälter und in den beiden Verteilerdosen. Des Weiteren stehen Messinformationen über den dem Beruhigungsbehälter zugeführten Luftmassenstrom und die Temperatur im Druckspeicher zur Verfügung. Über ein modellgestütztes Messverfahren [1], das sog. Erweiterte Kalman-Filter (Extended Kalman-Filter, EKF), werden unsichere Parameter zur Beschreibung der Kennlinien der Proportionalwegeventile sowie die einzelnen Aktuationmassenströme in Echtzeit geschätzt. Ein Exakt-Linearisierender Mehrgrößenregler [3] regelt wahlweise die Drücke in den Verteilerdosen oder die Aktuationsmassenströme in die Kaskade, wobei Letzterer eine symmetrische Aktuation bewirkt. Der geschlossene Regelkreis hat eine Bandbreite von $72.8\ \mathrm{rad/s}$, wobei diese maßgeblich durch die endlichen Ventilquerschnitte begrenzt ist.

## 3 EFFEKTE DER AKTUATION

Zur Untersuchung des Einflusses der Aktuation auf die vorherrschenden Strömungsphänomene werden Ölanstrichbilder erstellt sowie Nachlaufmessungen mit Hilfe einer Fünflochsonde durchgeführt. Dabei wird die Aktuationsamplitude variiert und über den Aktuationsregelkreis geregelt, um symmetrische Einblasbedingungen zu realisieren. Im Folgenden werden die Ergebnisse zunächst für stationäres Einblasen im Vergleich zur Basisströmung vorgestellt.

### 3.1 Ölanstrichbilder

Zur Visualisierung der Strömungstopologie wird das Ölanstrichverfahren angewendet. Die Ölmischung besteht aus Paraffinöl und Farbpigmenten mit einer mittleren Partikelgröße von $5\ \mu\mathrm{m}$. Diese Mischung wird auf die Druck- und Saugseite der mittleren zwei Schaufeln sowie auf die Seitenwände im Bereich der mittleren Passage aufgetragen und trocknet im Verlauf des Messvorganges. Dabei folgen die Partikel den Oberflächenstromlinien in der Grenzschicht. Nach dem Trockenvorgang werden die

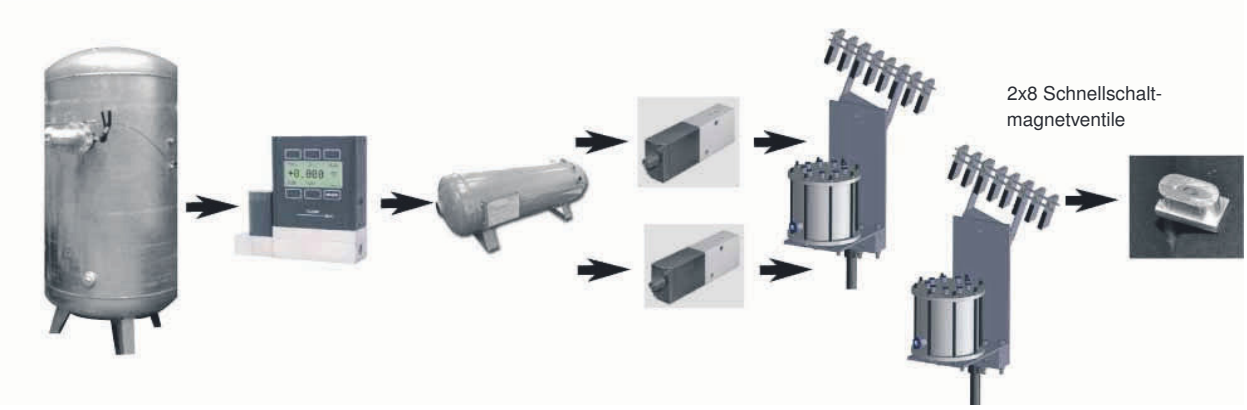



BILD 3: Aufbau der Aktuatorik

Schaufelseiten und die Seitenwände mit einer hochauflösenden Kamera fotografiert.

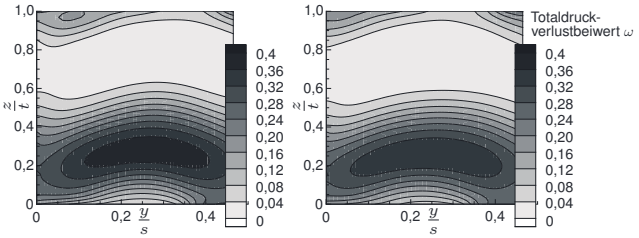
In Bild 5 (a) - (d) ist eine Aufnahme der spannweitig halben Saugseite für den Basisfall sowie drei verschiedene Aktuationsamplituden dargestellt. Die Strömung kommt hierbei von links, die Vorderkante der Schaufel ist bei $0\%\ c$ positioniert während sich die Hinterkante bei $100\%\ c$ befindet. Die Nullposition in y-Richtung (spannweitig) liegt im Mittelschnitt der Schaufel. Die eingebauten Drucksensoren sind als rote Punkte eingetragen. Der Vergleich zwischen der Basisströmung (Bild 5 (a)) und dem stationären Einblasen mit einem Massenstromverhältnis von $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.009$ mit dem Aktuationsmassenstrom $\dot{m}_{act}$ und dem Massenstrom der Hauptströmung $\dot{m}_1$ (Bild 5 (b)) zeigt im Falle der Ausblasung eine geringfügige Reduktion des Eckenwirbels in spannweitiger Richtung. Die Lage des Rückströmgebietes wird durch das Einblasen ebenfalls beeinflusst.
Wird die Aktuationsamplitude weiter erhöht (Bild 5 (c) und (d)), wandert der Eckenwirbel deutlich weiter in Richtung Seitenwand und das Rückströmgebiet wird kleiner. Dadurch wird die Einschnürung in Richtung des Mittelschnitts verringert und ein höherer statischer Druckaufbau bzw. geringere Totaldruckverluste erreicht. Um diese Aussage zu verifizieren, werden Nachlaufmessungen durchgeführt.

### Nachlaufmessungen

Um die Charakteristik des Nachlaufes zu erfassen, werden Messungen mit einer Fünflochsonde eine halbe Sehnenlänge hinter der Schaufelhinterkante durchgeführt. Somit kann der statische Druckaufbau über die Kaskade sowie die entstehenden Totaldruckverluste bestimmt werden. Die Fünflochsonde weist einen Kopfdurchmesser von $3\ \mathrm{mm}$ auf und wird auf einem 3-achsigen Traversiersystem befestigt, so dass zweidimensionale Messungen parallel zum Kaskadenaustritt durchgeführt werden können.
Der Totaldruckverlustkoeffizient ist definiert als

$$\omega = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_1}\ , \tag{1}$$

wobei der Index $1$ für die Zuströmung und der Index $2$ für die Abströmung stehen. Bild 6 zeigt den Vergleich zwischen dem Totaldruckverlustbeiwert $\omega$ der Basisströmung (a) und stationärem Einblasen bei einem Massenstromverhältnis von $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.011$ (b).



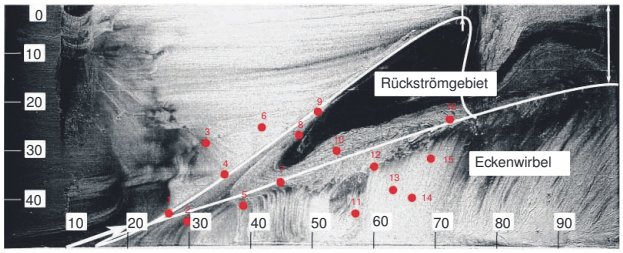

(a) Basisströmung (b) stat. Einblasen, $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.011$

BILD 6: Nachlaufmessungen parallel zum Kaskadenaustritt

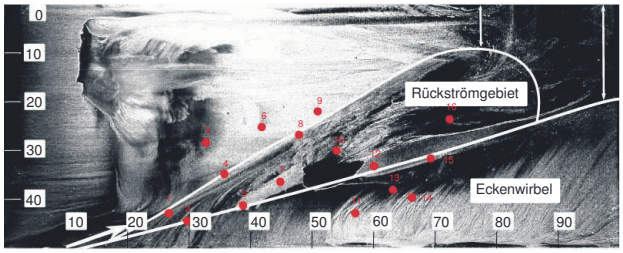
Zu sehen ist die Ebene parallel zum Kaskadenaustritt vom Mittelschnitt bis zur Seitenwand $(0 - 0.5\ y/s)$ für eine volle Passage $(0 - 1\ z/t)$. Dabei liegt die Hinterkante der mittleren Schaufel bei $z/t = 0$ und die Hinterkante der benachbarten Schaufel bei $z/t = 1$. Der saugseitige Eckenwirbel ist als Keule im unteren Bereich der Abbildungen zu erkennen. Die Verlustbeiwerte im Kern des Eckenwirbels ist bei der Basisströmung (a) höher als bei der stationär beeinflussten Messung (b). Durch das Einblasen können nicht nur die maximalen Verlustbeiwerte minimiert werden, sondern auch die Position des Eckenwirbels verschiebt sich im Fall der Einblasung in Richtung Schaufeloberfläche. Damit weist ein etwas größerer Bereich der Passagenströmung nahezu verlustfreie Gebiete auf.

## 4 IDENTIFIKATION EINER REGELGRÖßE FÜR DIE LINEARE STATORKASKADE

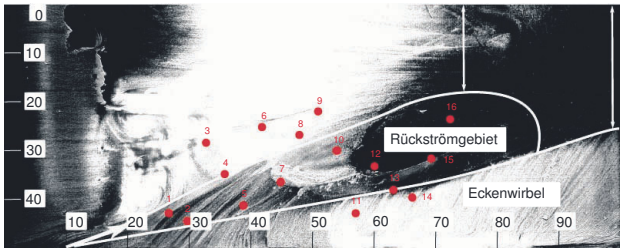
Ziel dieses Abschnittes ist das Auffinden einer aussagekräftigen Regelgröße, welche die Effekte der Aktuation bestmöglich widerspiegelt. Im vorigen Abschnitt wurde festgestellt, dass die Eckenwirbel und das Rückströmgebiet mit steigender Aktuationsamplitude zur Wand wandern. Dadurch werden die Bereiche der freien Passagenströmung



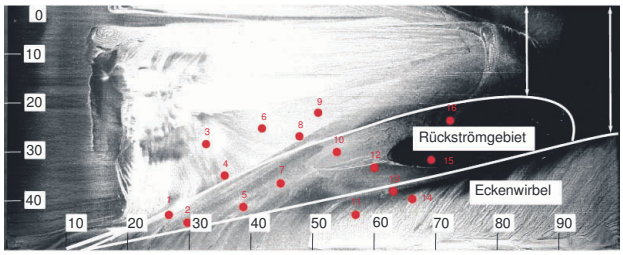

(a) Basisströmung




(b) stat. Einblasen, $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.009$




(c) stat. Einblasen, $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.01$




(d) stat. Einblasen, $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.011$

BILD 5: Ölanstrichbilder

vergrößert, was sich in einer Reduktion des Verlustbeiwertes $\omega$ widerspiegelt. Dieser Effekt stellt die wichtigste Wirkung der Aktuation dar. Um diesen Effekt auch bei Vorhandensein von Störungen garantieren zu können, soll die Aktuationsamplitude im geschlossenen Regelkreis angepasst werden. Gesucht ist eine Regelgröße mit größtmöglichem Signal-zu-Rauschverhältnis (Signal-to-Noise Ratio, SNR), welche mit steigender Aktuationsamplitude monoton fällt oder steigt und einen eindeutigen Zusammenhang zu $\omega$ aufweist. Zur Ermittlung dieser Regelgröße wird eine Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA), geeignet gewichteter Sensordaten durchgeführt.

### 4.1 Hauptkomponentenanalyse

Die PCA ist ein Standardwerkzeug für die Analyse hochdimensionaler Datensätze. Ziel ist es „interessante“ Strukturen bzw. Strukturen mit einem großen Informationsgehalt in den Daten zu finden. Hierbei wird angenommen, dass große (statistische) Varianzen in den Daten von deterministischen und kleine Varianzen von stochastischen Prozessen herrühren. Da in der Regel die Beschreibung deterministischer Prozesse von Interesse ist, ist die Aussagekraft einer Struktur (entsprechend obiger Annahme) umso größer, je größer ihre statistische Varianz ist.
Betrachtet werden $i = 1, \ldots, n$ $m$-dimensionale Datenvektoren $\underline{x}_i = (x_i(1),\ x_i(2),\ \ldots,\ x_i(m))^T \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, wobei $\underline{x}_i(k)$ die $k$-te Komponente von $\underline{x}_i$ beschreibt. Die mittelwertbefreiten Datenvektoren werden in einer Datenmatrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zusammengefasst

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1^T - \underline{1}_m^T \cdot \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \underline{x}_1(k) \right) \\ \underline{x}_2^T - \underline{1}_m^T \cdot \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \underline{x}_2(k) \right) \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T - \underline{1}_m^T \cdot \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \underline{x}_n(k) \right) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei $\underline{1}_m = (1,\ 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ einen $m$-dimensionalen Spaltenvektor darstellt. Die statistische Schätzung der Kovarianzmatrix des Datensatzes $\mathbf{X}$ lautet $\mathbf{C_X} = \frac{1}{m-1}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Auf der Hauptdiagonale von $\mathbf{C_X}$ stehen die Varianzen (Informationsgehalt) der einzelnen Datenvektoren. Die Nebendiagonalelemente von $\mathbf{C_X}$ sind die entsprechenden Kovarianzen, sie beschreiben den statistischen Zusammenhang der einzelnen Datenvektoren. In diesem Artikel handelt es sich bei den Datenvektoren um von verschiedenen Sensoren aufgezeichnete Messinformationen. Unter Zuhilfenahme von $\mathbf{C_X}$ können aussagekräftige/nicht-aussagekräftige sowie redundante/nicht-redundante Sensoren identifiziert werden. Wünschenswert wäre ein Algorithmus, welcher aus der Kenntnis von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{C_X}$ eine Linearkombination von Sensoren ermittelt, so dass ein entsprechend transformierter Datenvektor maximale Varianz, also maximalen Informationsgehalt aufweist. Des Weiteren sind andere Linearkombination von Sensoren interessant, so dass die entsprechend transformierten Datenvektoren die zweitgrößte, drittgrößte, etc. Varianz besitzen. Zudem sollte ein transformierter Datenvektor statistisch betrachtet nichts mit den $n-1$ anderen transformierten Datenvektoren zu tun haben, die transformierten Datenvektoren sollen demnach unkorreliert sein. Wird ferner angenommen, dass diese Linearkombinationen orthogonal sind, so ist dieses Problem durch Methoden der linearen Algebra (Matrixzerlegungen) lösbar. Die PCA ist ein Algorithmus, welcher diese $n$ Linearkombinationen der Sensoren, die sog. Hauptkomponenten $\underline{p}_i^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ mit $\left\| \underline{p}_i^T \right\|_2 = 1$ von $\mathbf{X}$, ermittelt. Die PCA findet demnach eine orthonormale Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \underline{p}_1^T \\ \underline{p}_2^T \\ \vdots \\ \underline{p}_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{3}$$

in der Abbildung $\mathbf{PX} = \mathbf{Y}$, so dass $\mathbf{C_Y} = \frac{1}{m-1}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$ eine Diagonalmatrix ist. Die transformierte Datenmatrix $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist also dekorreliert. Dies wird genau dann erreicht, wenn jede Zeile $\underline{p}_i^T$ von $\mathbf{P}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{C_X}$ ist. Der

zum größten Eigenwert von $\mathbf{C_X}$ gehörende Eigenvektor ist die 1. Hauptkomponente $\underline{p}_1^T$ von $\mathbf{X}$, etc. Die 1. Hauptkomponente $\underline{p}_1^T$ gibt diejenige Linearkombination der $n$ Sensoren an, für welche die Varianz von $\underline{y}_1^T = \underline{p}_1^T \mathbf{X}$ maximal wird. Für eine detailierte Herleitung sei der Leser auf [4], [5] verwiesen. Einen Einstieg bieten die Tutorials [7], [8].

### 4.2 Problematik

Wie oben bereits erwähnt ist eine Annahme der PCA, dass große Varianzen in den Daten einem hohen Informationsgehalt entsprechen. Es wird also davon ausgegangen, dass die einzelnen $\underline{x}_i^T$ ein großes SNR besitzen. Oft verletzen die vorhandenen Daten diese Annahme und eine PCA führt ohne Weiteres nicht mehr zu einem sinnvollen Ergebnis. Um dies zu erkennen, wird der $i$-te Datenvektor detailierter angeschrieben, wobei $\underline{x}_i^T$ aus einem deterministischen Signalanteil $\underline{s}_i^T \in \mathbb{R}^{1\times m}$ und einem stochastischen Rauschanteil $\underline{n}_i^T \in \mathbb{R}^{1\times m}$ besteht:

$$\underline{x}_i^T = \underline{s}_i^T + \underline{n}_i^T \,. \tag{4}$$

Für alle Vektoren $\underline{s}_i^T$ bzw. $\underline{n}_i^T$ werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Die statistische Schätzung des Mittelwertes des Signalanteils der $\underline{x}_i^T$ sei

$$\hat{m}_{s,i} = \frac{1}{m}\,\underline{1}_m^T\,\underline{s}_i \,.$$

  Die statistische Schätzung des Mittelwertes des Rauschanteils der $\underline{x}_i^T$ sei

$$\hat{m}_{n,i} = \frac{1}{m}\,\underline{1}_m^T\,\underline{n}_i = 0 \,,$$

  woraus für die statistische Schätzung des Mittelwertes des Datenvektors $\underline{x}_i$ folgt

$$\begin{aligned}\hat{m}_{x,i} &= \frac{1}{m}\,\underline{1}_m^T\,\underline{x}_i \\ &= \frac{1}{m}\,\underline{1}_m^T\,(\underline{s}_i + \underline{n}_i) \\ &= \frac{1}{m}\,\underline{1}_m^T\,\underline{s}_i \;+\; \frac{1}{m}\,\underline{1}_m^T\,\underline{n}_i \\ &= \hat{m}_{s,i} \,.\end{aligned}$$

  Die mittelwertbefreiten Datenvektoren seien

$$\begin{aligned}\check{\underline{s}}_i &= \underline{s}_i - \underline{1}_m\,\hat{m}_{s,i} \,, \\ \check{\underline{x}}_i &= \underline{x}_i - \underline{1}_m\,\hat{m}_{s,i} \,.\end{aligned}$$

- Die statistische Schätzung der Varianz von Signal- und Rauschanteil seien $\hat{\sigma}_{s,i}^2$ und $\hat{\sigma}_{n,i}^2$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{s,i}^2 &= \frac{1}{m-1}\,\check{\underline{s}}_i^T\,\check{\underline{s}}_i \,, \\ \hat{\sigma}_{n,i}^2 &= \frac{1}{m-1}\,\underline{n}_i^T\,\underline{n}_i \,.\end{aligned}$$

- Signal- und Rauschanteil aller $\underline{x}_i^T$ seien unkorreliert

$$\check{\underline{s}}_i^T\,\underline{n}_i = 0 \,.$$

Es wird festgehalten, dass $\underline{s}_i^T$ den wahren (interessierenden) Informationsgehalt in $\underline{x}_i^T$ darstellt und die statistische Schätzung der Varianz $\hat{\sigma}_{s,i}^2$ ein Maß für den Informationsgehalt repräsentiert. Der Einfachheit halber wird im Folgenden nur noch von Mittelwert und Varianz gesprochen, obwohl die statistischen Schätzungen gemeint sind.
Das SNR von $\underline{x}_i^T$ sei definiert als $\mathrm{SNR}_{\underline{x}_i} = \hat{\sigma}_{s,i}/\hat{\sigma}_{n,i}$. Die Varianz $\hat{\sigma}_{x,i}^2$ des Datenvektors $\underline{x}_i^T$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{x,i}^2 &= \frac{1}{m-1}\,\check{\underline{x}}_i^T\,\check{\underline{x}}_i \\ &= \frac{1}{m-1}\,(\check{\underline{s}}_i + \underline{n}_i)^T\,(\check{\underline{s}}_i + \underline{n}_i) \\ &= \frac{1}{m-1}\left(\check{\underline{s}}_i^T\,\check{\underline{s}}_i + \underline{n}_i^T\,\check{\underline{s}}_i + \check{\underline{s}}_i^T\,\underline{n}_i + \underline{n}_i^T\,\underline{n}_i\right) \\ &= \hat{\sigma}_{s,i}^2 + \hat{\sigma}_{n,i}^2 \,.\end{aligned} \tag{5}$$

Die Varianz des $i$-ten Datenvektors ist demnach die Summe der Varianzen des $i$-ten Signalvektors und des $i$-ten Rauschvektors. Prinzipbedingt stuft die PCA **jede** Varianz als Informationsgehalt ein. Ist beispielsweise $\hat{\sigma}_{s,j}^2 = 0,\ \hat{\sigma}_{n,j}^2 >> 1$ und $\hat{\sigma}_{x,j}^2 = \max_i\{\hat{\sigma}_{x,i}^2\}$, so wird der $j$-te Sensor als sehr bedeutsam eingestuft, obwohl dieser keinerlei Information über den deterministischen Prozess enthält. Das Problem ist, dass die PCA nicht zwischen den verschiedenen **Ursachen** der Varianz von $\underline{x}_i^T$ unterscheiden kann.

### 4.3 Verbesserung des Signal- zu Rauschverhältnisses durch Wichtung der Datenmatrix

Es stellt sich die Frage, ob das Wissen über $\hat{\sigma}_s^2$ und $\hat{\sigma}_n^2$ genutzt werden kann, um den Datensatz $\mathbf{X}$ im Vorfeld so zu skalieren, dass das oben beschriebene Problem nicht auftreten kann. Die Idee ist, die einzelnen Datenvektoren so zu wichten, dass die Varianz des gewichteten Datenvektors groß wird, wenn $\hat{\sigma}_{s,i}$ groß und/oder $\hat{\sigma}_{n,i}$ klein ist. Es werden demnach die zeitinvarianten Gewichte $w_i \in \mathbb{R}^1$ in der Abbildung $\widetilde{\underline{x}}_i^T = w_i^{-1}\check{\underline{x}}_i^T$ gesucht, so dass

$$\hat{\sigma}_{\widetilde{x},i}^2 \stackrel{!}{=} \frac{\hat{\sigma}_{s,i}^2}{\hat{\sigma}_{n,i}^2} \tag{6}$$

gilt. Die Varianz des gewichteten $i$-ten Datenvektors $\widetilde{\underline{x}}_i^T$ lautet

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\widetilde{x},i}^2 &= \frac{1}{m-1}\widetilde{\underline{x}}_i^T\,\widetilde{\underline{x}}_i \\ &= w_i^{-2}\,\frac{1}{m-1}\,\left(\hat{\underline{x}}_i^T\,\hat{\underline{x}}_i\right) \\ &= w_i^{-2}\left(\hat{\sigma}_{s,i}^2 + \hat{\sigma}_{n,i}^2\right) \,.\end{aligned} \tag{7}$$

Für das $i$-te inverse Gewicht $w_i^{-1}$ folgt mit (6)=(7):

$$w_i^{-1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{s,i}^2}{\hat{\sigma}_{n,i}^2\left(\hat{\sigma}_{s,i}^2 + \hat{\sigma}_{n,i}^2\right)}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{s,i}^2}{\hat{\sigma}_{n,i}^2\hat{\sigma}_{x,i}^2}} \tag{8}$$

Zur Veranschaulichung wird der signalfreie Fall betrachtet. Für einen Datenvektor, der keine Information enthält $\left(\underline{s}^T = \underline{0}^T\right)$, ergibt sich die gewichtete Messreihe zu

$$\widetilde{\underline{x}}_{s0}^T = w^{-1}\left(\underline{0}^T + \underline{n}^T\right) \,. \tag{9}$$

Für die Varianz der gewichteten signalfreien Messreihe folgt zunächst:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2_{\underline{\widetilde{x}},s0} &= w^{-2}\,\frac{1}{m-1}\,\left(\underline{n}^T\,\underline{n}\right)\\ &= w^{-2}\hat{\sigma}^2_n\\ &= \frac{\hat{\sigma}^2_s}{\hat{\sigma}^2_s+\hat{\sigma}^2_n} \leq 1\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Mit $\underline{s}^T = \underline{0}^T$ folgt aber auch $\hat{\sigma}^2_s = 0$, was zu

$$\hat{\sigma}^2_{\underline{\widetilde{x}},s0} = \frac{0}{0+\sigma^2_{n,i}} = 0 \tag{11}$$

führt $\Rightarrow$ unabhängig von $\hat{\sigma}_{x,i}$ wird die PCA Datenvektoren mit wenig Informationsgehalt durch die Wichtung mit $w_i$ als unwichtig einstufen.

Wird dieses Ergebnis auf den kompletten zeilenweise mittelwertbefreiten Datensatz $\mathbf{X}$ übertragen, so ergibt sich mit der diagonalen inversen Wichtungsmatix

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w_2^{-1} & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & w_n^{-1}\end{pmatrix} \tag{12}$$

der gewichtete Datensatz

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}\,. \tag{13}$$

Die gewichtete Kovarianzmatrix lautet somit:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{X}} &= \frac{1}{m-1}\widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}}^T\\ &= \frac{1}{m-1}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\left(\mathbf{W}^{-1}\right)^T\\ &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{X}}\mathbf{W}^{-1}\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Die Komponenten $w_i^{-1}$ von $\mathbf{W}^{-1}$ können beliebig gewählt werden, beispielsweise wie oben komponentenweise gezeigt $w_i^{-1} = \sqrt{\sigma^2_{s,i}/\left(\sigma^2_{n,i}\sigma^2_{x,i}\right)}$ . Wird $\widetilde{\mathbf{X}}$ bzw. $\widetilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{X}}$ anstelle von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ als Eingangsgröße eines PCA-Algorithmus verwendet, spricht man von einer gewichteten Hauptkomponentenanalyse (Weighted Principal Component Analysis, WPCA), siehe [4].

### 4.4 Anwendung der gewichteten Hauptkomponentenanalyse auf die lineare Statorkaskade

Im Folgenden wird gezeigt, wie die geschätzten Varianzen $\hat{\sigma}^2_{s,i}$ und $\hat{\sigma}^2_{n,i}$ aus experimentellen Daten geeigneter Experimente ermittelt werden können. Hierzu werden $k = 1,\ldots,m$ Experimente mit unterschiedlichem, äquidistant verteiltem, stationärem Aktuationsmassenstrom durchgeführt. Die Aktuationmassenströme werden unterlagert geregelt, siehe Abschnitt 2.4. Die Aktuatorsignale decken dabei den gesamten Bereich ab, welcher später auch von der Regelung der Passagenströmung ausgenutzt werden soll. Der zum $k$-ten Experiment gehörende Aktuationsmassenstrom wird mit ${}^{(k)}\dot{m}_{\mathrm{act}}$ bezeichnet. Nach hinreichend langer Zeit reagiert die Kaskade mit einer im Mittelwert stationären Antwort. Die Systemantwort wird über die $n = 16$ Drucksensoren auf der Schaufelsaugseite aufgezeichnet. Jeder der $i = 1,\ldots,n$ Sensoren erzeugt im $k$-ten Experiment einen entsprechend der Messdauer und Abtastschrittweite $q$-dimensionalen Datenvektor ${}^{(k)}\underline{d}_i^T \in \mathbb{R}^{1\times q}$. Die $n\times m\times q$ Datenpunkte werden im Folgenden herangezogen, um sowohl die Schätzungen $\hat{\sigma}^2_{s,i}$ und $\hat{\sigma}^2_{n,i}$ als auch die Hauptkomponenten zu berechnen.
Da sich der Aktuationsmassenstrom innerhalb eines Experimentes während der Messung nicht ändert, und die **stationäre** Antwort der Kaskade aufgezeichnet wurde, darf angenommen werden, dass jeder Datenvektor aus einem deterministischen, **zeitlich konstanten** Signalanteil ${}^{(k)}d_{s,i}\underline{1}_q^T = {}^{(k)}\underline{d}_{s,i}^T \in \mathbb{R}^{1\times q}$ und einem mittelwertfreien Rauschanteil ${}^{(k)}\underline{d}_{n,i}^T \in \mathbb{R}^{1\times q}$ besteht:

$${}^{(k)}\underline{d}_i^T = {}^{(k)}d_{s,i}\underline{1}_q^T + {}^{(k)}\underline{d}_{n,i}^T\,. \tag{15}$$

Somit folgt für die Schätzungen von Mittelwert und Varianz von ${}^{(k)}\underline{d}_i^T$:

$$\begin{aligned}{}^{(k)}\hat{m}_{d,i} &= \frac{1}{q}\left({}^{(k)}\underline{d}_i^T\,\underline{1}_q\right) = {}^{(k)}d_{s,i}\,,\\ {}^{(k)}\check{\underline{d}}_i &= {}^{(k)}\underline{d}_i - {}^{(k)}\hat{m}_{d,i}\underline{1}_q = {}^{(k)}\underline{d}_{n,i}\,,\end{aligned} \tag{16}$$

$${}^{(k)}\hat{\sigma}^2_{d,i} = \frac{1}{q-1}{}^{(k)}\check{\underline{d}}_i^T\,{}^{(k)}\check{\underline{d}}_i = {}^{(k)}\hat{\sigma}^2_{d_n,i}\,. \tag{17}$$

Die Schätzung der Varianz des vom $i$-ten Sensor im $k$-ten Experiment aufgezeichneten Rauschprozesse lautet somit:

$${}^{(k)}\hat{\sigma}^2_{n,i} = \frac{\left({}^{(k)}\underline{d}_i^T - \left(\frac{{}^{(k)}\underline{d}_i^T\,\underline{1}_q}{q}\right)\underline{1}_q^T\right)\left({}^{(k)}\underline{d}_i - \left(\frac{{}^{(k)}\underline{d}_i^T\,\underline{1}_q}{q}\right)\underline{1}_q\right)}{q-1}\,.$$

Durch Mittelwertbildung über alle $m$ Experimente, wird die Varianz des vom $i$-ten Sensor gemessenen Rauschprozesses ermittelt:

$$\hat{\sigma}^2_{n,i} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}{}^{(k)}\hat{\sigma}^2_{d_n,i}\,. \tag{18}$$

Die $n\times m$ Schätzungen der Mittelwerte des deterministischen Signalanteils in ${}^{(k)}\underline{d}_i^T$, siehe Gl. (16), werden in einer Datenmatrix $\mathbf{S}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ zusammengefasst:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix}{}^{(1)}\hat{m}_{d,1} & \cdots & {}^{(m)}\hat{m}_{d,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{(1)}\hat{m}_{d,n} & \cdots & {}^{(m)}\hat{m}_{d,n}\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}\underline{s}_1^T\\ \underline{s}_2^T\\ \vdots\\ \underline{s}_n^T\end{pmatrix}\,. \tag{19}$$

Die geschätzte Varianz des vom $i$-ten Sensor aufgezeichneten deterministischen Prozesses lautet:

$$\hat{\sigma}^2_{s,i} = \frac{1}{m-1}\underbrace{\left(\underline{s}_i^T - \underbrace{\left(\frac{1}{m}\underline{s}_i^T\,\underline{1}_m\right)}_{\hat{m}_{s,i}}\underline{1}_m^T\right)}_{\underline{x}_i^T}\underbrace{\left(\underline{s}_i - \left(\frac{1}{m}\underline{s}_i^T\,\underline{1}_m\right)\underline{1}_m\right)}_{\underline{x}_i}\,.$$

Es sei angemerkt, dass die $i$-te Zeile von $\mathbf{S}$ einer statistisch gemittelten Kennlinie, welche das **stationäre** Übertragungsverhalten von Aktuationsamplitude auf das $i$-te Sensorsignal beschreibt, entspricht. Wie dargestellt stützt sich die Berechnung von $\hat{\sigma}^2_{s,i}$ auf gemittelte, aber verrauschte, also zufällige Messdaten. Das Ergebnis ist somit ebenfalls zufällig und unterliegt einer gewissen Varianz. Ursachen hierfür sind sowohl die endliche Messdauer ($q << \infty$)

als auch unbekannte, nicht-mittelwertfreie Störungen in der Kaskadenströmung.
Mit den Schätzungen $\hat{\sigma}^2_{s,i}$ und $\hat{\sigma}^2_{n,i}$ werden die Gewichte $w_i$ und somit die Wichtungsmatrix $\mathbf{W}$ berechnet. Wird $\mathbf{S}$ zeilenweise mittelwertbefreit, so entsteht die Datenmatrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\text{(20)} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T - \hat{m}_{s,1}\,\underline{1}_m^T \\ \underline{s}_2^T - \hat{m}_{s,2}\,\underline{1}_m^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T - \hat{m}_{s,n}\,\underline{1}_m^T \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \underline{x}_1^T \\ \underline{x}_2^T \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T \end{pmatrix},$$

womit sich die gewichtete Datenmatrix $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$ berechnen lässt. Die Zeilen $\underline{\widetilde{x}}_i^T$ der gewichtete Datenmatrix sind links in Bild 7 dargestellt. Mit $\widetilde{\mathbf{X}}$ wird eine PCA durchgeführt.

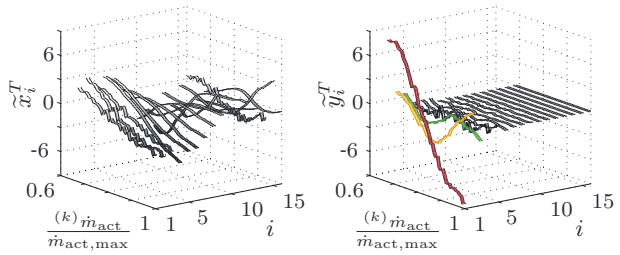



BILD 7: Links: Darstellung der Zeilen $\underline{\widetilde{x}}_i^T$ des gewichteten Datensatzes $\widetilde{\mathbf{X}}$. Rechts: Darstellung der Zeilen $\underline{\widetilde{y}}_i^T$ des transformierten Datensatzes $\widetilde{\mathbf{Y}}$ ($\underline{\widetilde{y}}_1^T$ rot, $\underline{\widetilde{y}}_2^T$ gelb, $\underline{\widetilde{y}}_3^T$ grün).

Die Zeilen $\underline{\widetilde{y}}_i^T$ der transformierten Datenmatrix $\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{X}}$ sind rechts in Bild 7 dargestellt. $\widetilde{\mathbf{Y}}$ erscheint im Gegensatz zu $\widetilde{\mathbf{X}}$ strukturiert. An den gewichteten Originaldaten $\widetilde{\mathbf{X}}$, d.h. im nicht dekorrelierten Fall, erkennt man, dass sich alle Druckmessungen bzgl. ihres Mittelwertes mehr oder weniger stark ändern, wenn die Aktuationsamplitude erhöht wird. Im dekorrelierten Fall $\widetilde{\mathbf{Y}}$ sieht man, dass dies im Wesentlichen nur wenige Linearkombinationen betrifft. Die transformierten Messreihen $\underline{\widetilde{y}}_1^T$, $\underline{\widetilde{y}}_2^T$ und , $\underline{\widetilde{y}}_3^T$ sind farblich hervorgehoben, um die außerordentliche Varianz und Dekorreliertheit darzustellen.

## 4.5 Ergebnisse

Die ersten drei Hauptkomponenten der WPCA (Kreis, weiß) und PCA (Punkt, schwarz) sind in Abbildung 8 dargestellt. Zur Interpretation der PCA-Ergebnisse werden die bereits

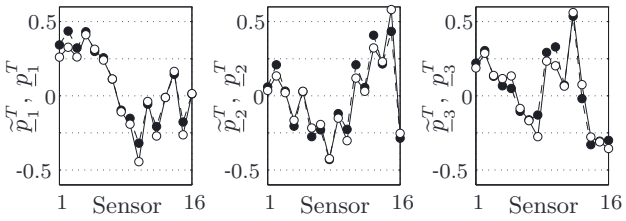



BILD 8: Darstellung der ersten 3 Hauptkomponenten. Gewichtete PCA: $\underline{\widetilde{p}}_i^T$ (Punkt, schwarz). Standard-PCA: $\underline{p}_i^T$ (Kreis, weiß).

in Kapitel 3.1 beschriebenen Ölanstrichbilder herangezogen. Wie erwähnt, stellen die roten Punkte die Positionen der Druckaufnehmer in der Schaufel dar und werden von der Vorderkante bis zur Hinterkante der Schaufel mit $1$ bis $16$ durchnummeriert. Die PCA gibt für die erste Hauptkomponente (Bild 8) für die ersten sechs Sensoren hohe positive Werte an. Diese Druckaufnehmer liegen im Ausblasstrahl, wodurch die hohen Ausblasdrücke erfasst werden. Die höchsten Werte der PCA werden von Sensor $2$ und $4$ aufgenommen. Sensor $2$ befindet sich an der Grenze zwischen dem Eckenwirbel und dem Gebiet zwischen Eckenwirbel und freier Anströmung. Je nach Ausblasamplitude ist er dem einen oder anderen Gebiet zuzuordnen. Sensor $4$ ist an der Grenze zwischen freier Anströmung und dem Gebiet zwischen Eckenwirbel und freier Anströmung positioniert. Diese Sensoren nehmen je nach Ausblasamplitude unterschiedliche Strömungsphänomene wahr und sind somit zur Beschreibung der Effektivität der Ausblasung gut geeignet und werden durch die PCA erfasst. Die Sensoren $7$, $8$, $9$, $11$, $13$ und $16$ liegen in Gebieten die sich trotz der Ausblasung kaum ändern, daher reagieren diese auch nicht sensitiv auf die PCA. Sensor $10$ liegt je nach Amplitude der Ausblasung im Rückströmgebiet oder in dem Bereich zwischen Eckenwirbel und freier Anströmung. Auch hier sieht der Sensor unterschiedliche Strömungsphänomene und ist somit sehr sensitiv für die Ausblasung. Die Sensoren $12$ und $15$ liegen teilweise im Bereich des Eckenwirbels und teilweise im Rückströmgebiet. Daher sind auch hier die Änderungen im Druck offensichtlich und werden von der PCA sehr gut erfasst.
Die PCA-Ergebnisse der zweiten Hauptkomponente weisen für die Sensoren, die im Grenzbereich zwischen dem Rückströmgebiet und dem zwischen freier Anströmung und Eckenwirbel befindlichen Gebiet liegen ($6$, $7$, $8$, $10$) hohe negative Werte auf. Sensoren, die je nach Ausblasamplitude im Bereich des Eckenwirbels oder des Rückströmgebietes liegen, weisen positive Werte auf. Hier scheint vor allem dem Rückströmgebiet eine hohe Bedeutung zuzukommen.
Mit der dritten Hauptkomponente werden die Sensoren positiv erfasst, die im Übergangsbereich zwischen Eckenwirbel bzw. dem Bereich zwischen Eckenwirbel und freier Anströmung liegen und jenen, die je nach Amplitude im Rückströmgebiet oder der freien Anströmung liegen. Negative Werte werden für die hinteren Sensoren ($14$-$16$) im Eckenwirbel bzw. bei Ausblasung im Rückströmgebiet aufgezeichnet.
Bild 9 soll den praktischen Nutzen der PCA demonstrieren. Dargestellt ist der normierte, zeitliche Verlauf des Sensors mit maximalem SNR (schwarz) und die zeitlichen Verläufe von $\widetilde{y}_1(t)$ (oben, rot) und $y_1(t)$ (unten, rot) für ein typisches Experiment zur Identifikation dynamischer Modelle. Hierbei entspricht der zeitliche Verlauf der Stellgröße, im konkreten Fall die Führungsgröße des unterlagerten Aktuationsregelkreises, einem Pseudo-Random-Binary-Signal (PRBS) einer bestimmten Bandbreite. Die Berechnung von $y_1(t)$ und $\widetilde{y}_1(t)$ zum Zeitpunkt $t$ gestaltet sich folgendermaßen:

$$y_1(t) = p_1^T \begin{pmatrix} x_1(t) - \hat{m}_{s,1} \\ \vdots \\ x_n(t) - \hat{m}_{s,n} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{y}_1(t) \quad = \quad \widetilde{p}_1^T w_1^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) - \hat{m}_{s,1} \\ \vdots \\ x_n(t) - \hat{m}_{s,n} \end{pmatrix} .$$

Hierbei stellt $x_i(t)$ das Sensorsignal des $i$-ten Sensors zum Zeitpunkt $t$ dar. Aus der Kenntnis der Systemantwort kann im Anschluss ein dynamisches Modell identifiziert werden. Dies gelingt umso besser, je größer das SNR der gemessenen Systemantwort ist. Des Weiteren wird das Messrauschen im geschlossenen Regelkreis über eine entsprechende Übertragungsfunktion (Produkt aus Reglerübertragungsfunktion und Sensitivitätsfunktion) auf die Stellgröße übertragen. Je größer die hochfrequenten Anteile der Messgrößen, desto größer müssen die Zeitkonstanten des geschlossenen Regelkreises gestaltet werden, was den geschlossenen Regelkreis verlangsamt. Für das dargestellte

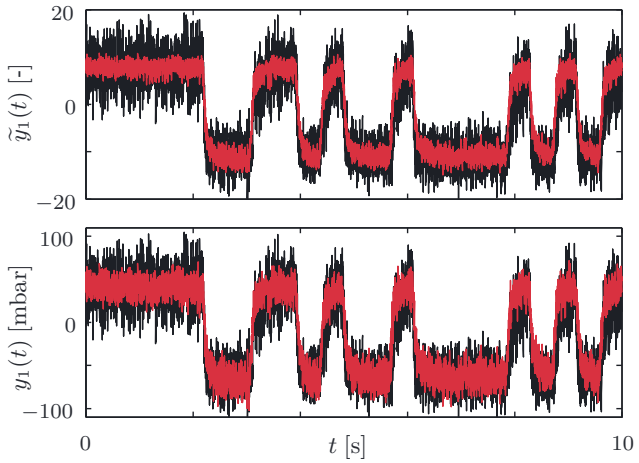



BILD 9: Zeitliche Verläufe von $\widetilde{y}_1(t)$ bzw. $y_1(t)$ (rot) bei Verwendung aller 16 Sensoren im Vergleich zu Sensor $i = 10$ (schwarz) bei einem PRBS-Experiment. Oben: Weighted-PCA $\widetilde{y}_1$. Unten: Standard-PCA $y_1$ .

Experiment ergeben sich die entsprechenden SNR zu:

$$\begin{aligned} \text{Bester Sensor:} \quad & \mathrm{SNR}_{\underline{x}_{10}} \quad = \quad 2.81 \,, \\ \text{Standard-PCA:} \quad & \mathrm{SNR}_{\underline{y}_1} \quad = \quad 4.91 \,, \\ \text{Weighted-PCA:} \quad & \mathrm{SNR}_{\underline{\widetilde{y}}_1} \quad = \quad 7.82 \,. \end{aligned}$$

Durch die Wichtung konnte das SNR im Vergleich zur Standard-PCA deutlich gesteigert werden.

Abschließend soll die Abhängigkeit der Signalqualität von der Anzahl der verwendeten Sensoren dargestellt werden. In Bild 10 ist der Einfluss der Sensorreduktion auf $\underline{\widetilde{y}}_1^T$, $\underline{\widetilde{y}}_2^T$ und $\underline{\widetilde{y}}_3^T$ (links) und die sich daraus ergebenden, den jeweiligen Informationsgehalt repräsentierenden, geschätzten Standardabweichungen $\hat{\sigma}_{\widetilde{y},1}$, $\hat{\sigma}_{\widetilde{y},1}$ und $\hat{\sigma}_{\widetilde{y},1}$ (rechts) dargestellt. Werden alle Sensoren verwendet, so ergibt sich das in rot dargestellte Ergebnis. Wird der entsprechend der 1. Hauptkomponente am wenigsten aussagekräftige Sensor entfernt, so ergibt sich das in schwarz dargestellte Ergebnis. Die Fortführung dieser Vorgehensweise erzeugt die grau dargestellten Ergebnisse. Die Entscheidung, wieviele Sensoren letztendlich verwendet werden sollen, unterliegt dem ingenieurmäßigem Verständnis des Anwenders. Es bleibt zu erwähnen, dass das Ergebnis stark von den gewählten Sensorpositionen abhängt. Da aus praktischen Gründen nicht die gesamte Schaufelsaugseite vermessen werden kann, unterliegt die Messung immer einer begrenzten örtlichen Auflösung. Es ist somit nicht auszuschließen, dass eine geschicktere Wahl von Sensorpositionen existiert. Die Hauptkomponenten liefern jedoch wertvolle Hinweise darüber, wo Sensoren für die Verwendung in einer Regelung zu platzieren sind.

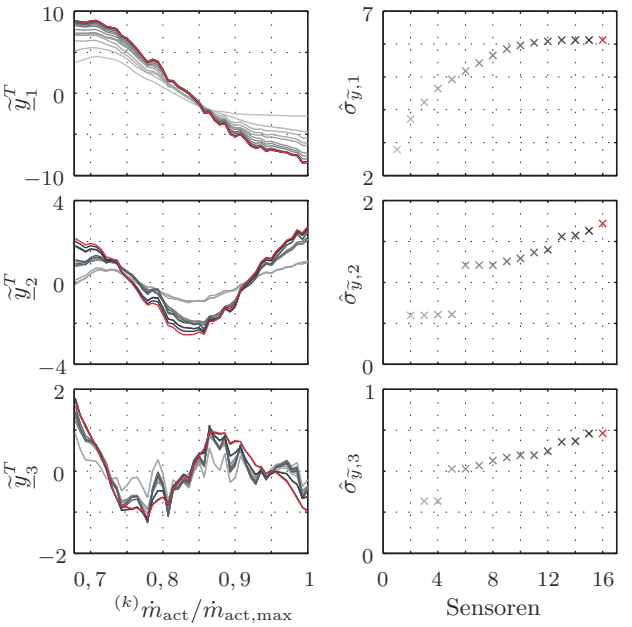



BILD 10: Einfluss der Sensorreduktion auf den Informationsgehalt der transformierten Messreihen. Links: Darstellung der ersten drei Zeilen von $\widetilde{\mathbf{Y}}$ über der Aktuationsamplitude für eine verschiedene Anzahl von berücksichtigten Sensoren. Rechts: Darstellung der Standardabweichung (Informationsgehalt) der durch die ersten drei Zeilen von $\widetilde{\mathbf{Y}}$ beschriebenen Kennlinien über der Anzahl der berücksichtigten Sensoren.

## ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Am Fachgebiet Luftfahrtantriebe der Technischen Universität Berlin wurde ein linearer Kaskadenprüfstand mit hochbelasteten Verdichterstatoren aufgebaut, um Methoden aktiver Strömungskontrolle für den kompressiblen Machzahlbereich zu untersuchen. Daran wurden Untersuchungen zu stationärem Einblasen von Druckluft durch Seitenwandschlitze durchgeführt. Die Einblasamplitude wurde hierbei variiert.
Mit Hilfe von Ölanstrichbildern wurde die Strömungstopologie auf den Oberflächen des Schaufelprofils visualisiert. Der Vergleich zwischen der Basisströmung und dem stationären Einblasen mit einem Massenstromverhältnis von $\frac{\dot{m}_{act}}{\dot{m}_1} = 0.009$ zeigte eine geringfügige Reduktion des Eckenwirbels in spannweitiger Richtung. Die Lage des Rückströmgebietes wurde durch das Einblasen ebenfalls beeinflusst. Eine

Erhöhung der Aktuationsamplitude führte zu einer Verschiebung der Eckenwirbel in Richtung Seitenwand und einer Verringerung des Rückströmgebietes. Dadurch konnte die Einschnürung in Richtung des Mittelschnitts verringert und ein höherer statischer Druckaufbau bzw. geringere erzielbare Totaldruckverluste erzielt werden.
Des Weiteren wurden Nachlaufmessungen mit Hilfe einer Fünflochsonde durchgeführt. Die Verlustbeiwerte im Kern des Eckenwirbels konnten bei der stationär beeinflussten Messung im Vergleich zur Basisströmung verringert werden. Auch die Position des Eckenwirbels verschob sich im Fall der Einblasung in Richtung Schaufeloberfläche, sodass ein geringfügig größerer Bereich der Passagenströmung nahezu verlustfreie Gebiete aufweist.
Am Fachgebiet Mess- und Regelungtstechnik der Technischen Universität Berlin wurde ein Aktuationsregelkreis mit dem Ziel einer definierten, symmetrischen und reproduzierbaren Beeinflussung der Kaskadenströmung aufgebaut. Für die Identifikation einer die Effekte der Aktuation repräsentierenden Regelgröße wurden Experimente mit stationärer Aktuation durchgeführt. Die von der Sensorik-Schaufel aufgezeichneten, die Systemantwort der Kaskade darstellenden Messdaten, wurden geeignet gewichtet und einer Hauptkomponentenanaylyse unterzogen. Aus dem Analyseprozesses ist zum einen abzulesen, wo sich, für die Beschreibung der Effekte der Aktuation, günstige Sensorpositionen auf der Schaufelsaugseite befinden. Dies beinhaltet auch die Anzahl der für eine gewünschte Signalqualität erforderlichen Sensoren. Zum anderen wird diejenige Linearkombination von Sensordaten angegeben, welche die Effekte der Aktuation bei gegebener Sensorpositionierung im Sinne eines maximalen Signal-zu-Rauschverhältnisses optimal beschreiben. Auf diesen Untersuchungen basierend wurde inzwischen eine $H_\infty$-Regelung für die Passagenströmung aufgebaut und erfolgreich bezüglich des Stör- und Führungsverhaltens getestet, $\widetilde{y}_1(t)$ diente hierbei als Regelgröße.

## Literatur


[1] Y. Bar-Shalom, T. Kirubarajan, and X. R. Li. Estimation with Applications to Tracking and Navigation, Theory, Algorithms and Software. Wiley-Interscience Publication, New York, 2001.

[2] T. Colonius, C. W. Rowley, G. Tadmor, D. R. Williams, K. Taira, W. B. Dickson, M. Gharib, and M. Dickinson. Closed-loop Control of Leading-edge and Tip Vortices for Small UAV. Proceedings of the First Berlin Conference on Active Flow Control, September 2006.

[3] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer Verlag, London, 2001.

[4] J.E. Jackson. A User's Guide to Principal Components. Wiley-Interscience Publication, New York, 1991.

[5] I.T. Joliffe. Principal Component Analysis. Springer Series in Statistics, Springer Verlag, London, 1986.

[6] C.J. Kähler, P. Scholz, J. Ortmanns, and R. Radespiel. Towards Active Control of Leading Edge Stall by Means of Pneumatic Actuators. Active Flow Control, Papers contributed to the Conference Äctive Flow Control 2006", pages 152–172, 2006.

[7] A. Ng. Principal Components Analysis. Lecture Notes: Machine Learning Part XI, Stanford University, 2009.

[8] J. Shlens. A Tutorial on Principal Component Analysis. Center for Neural Science, New York University, 2009.

[9] O. Wiederhold, M. Hecklau, R. King, Nitsche, A. W., Huppetz, and M. Swoboda. Multivariable Control of a Critically Loaded Compressor Cascade. International Journal of Flow Control, 2(4):219–236, December 2010.

[10] O. Wiederhold, R. King, B. R. Noack, L. Neuhaus, W. Neise, L. Enghardt, and M. Swoboda. Adaptive Control in an Axial Turbofan - Model-free Implementation with Short Response Time. AIAA Journal, 49:1429–1436, 2011.

[11] V. Zander, M. Hecklau, W. Nitsche, A. Huppertz, and M. Swoboda. Experimentelle Methoden zur Charakterisierung der aktiven Strömungskontrolle in einer hoch belasteten Verdichterkaskade. Deutscher Luft- und Raumfahrt Kongress (DLRK2008-081322), 2008.