

HEIß-KALT-GEOMETRIETRANSFORMATION VON TRIEBWERKSKOMPONENTEN AUF DER GRUNDLAGE VON FE-BERECHNUNGEN UND NURBS-TRANSFORMATIONEN

L. Gaun¹, A. Huppertz² und D. Bestle¹

¹ Brandenburgische Technische Universität,
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik, Cottbus, Deutschland

² Rolls-Royce Deutschland, Dahlewitz, Deutschland

Zusammenfassung

Komplexe Bauteile werden im Allgemeinen in einem CAD-System konstruiert, wobei Freiformflächen üblicherweise durch NURBS-Flächen beschrieben werden. Zur Berechnung von Verformungen aufgrund von Lasten und Temperaturänderungen werden solche Bauteile diskretisiert und mithilfe eines Finite-Elemente Programms Verschiebungen an den FE-Knoten berechnet. Möchte man z.B. für die Fertigung ein kaltes, unbelastetes CAD-Modell oder für die Strömungsberechnungen ein verformtes Bauteil mit glatten Oberflächen erhalten, kann man die ursprüngliche NURBS-Beschreibung verwenden und die Kontrollpunkte geeignet verschieben. Dazu zerlegt man ein allgemeines Solid in Teiloberflächen, identifiziert zugehörige FE-Knoten, prägt das aus der FE-Rechnung erhaltene Verschiebungsfeld den Projektionspunkten der FE-Knoten auf und bestimmt die Kontrollpunktverschiebungen aus dem daraus resultierenden linearen Ausgleichsproblem. Lagestetigkeit und Tangentenstetigkeit lassen sich durch Sonderbehandlung der Randkurven und ihrer Nachbarkontrollpunkte erreichen. Besonderes Augenmerk ist Singularitäten des linearen Ausgleichsproblems bei getrimmten Flächen und bei unzureichenden FE-Netzen zu widmen. Die vorgestellte generische Morphing-Strategie wurde als Erweiterung in das CAD-System Unigraphics NX 6 implementiert und kann nun als Basis für eine automatisierte Heiß-Kalt-Geometrietransformationen verwendet werden. Anwendungen auf Teile einer Verdichterschaufel demonstrieren die hohe Robustheit und Genauigkeit des Verfahrens.

1. PROZESS DER HEIß-KALT-TRANSFORMATION

Im Allgemeinen werden alle aerodynamisch relevanten Geometrien eines Triebwerks im Betriebszustand, dem sogenannten heißen Zustand ausgelegt. Gegenüber dem Ruhezustand sind diese Geometrien aufgrund von Fliehkraftfeldern, Drucklasten und Temperaturdehnungen bereits deformiert. Für die Fertigung werden jedoch unbelastete (kalte) Geometrien benötigt. Diese Umrechnung geschieht in der Regel mit der Finite-Elemente (FE) Methode und führt auf ein Verschiebungsfeld.

Typischerweise lassen sich komplexe Bauteile wie Triebwerksschaufeln (Bild 1a) nur durch Freiformflächen beschreiben und z.B. durch NURBS parametrisieren. In dieser Form werden sie dann im heißen Zustand optimiert,

wobei die Kontrollpunktkoordinaten als Entwurfsvariablen dienen können [1]. Für die FE-Transformation wird diese parametrisierte Darstellung nun diskretisiert, so dass Verschiebungen Δd_k^{FE} nur an einzelnen FE-Knoten d_k^0 berechnet werden. Damit geht die NURBS-Beschreibung im verformten Zustand verloren, wird aber z.B. für die Herstellung der kalten Schaufel benötigt. Außerdem benötigt man für aerodynamische Berechnungen in anderen Betriebszuständen als dem Auslegungszustand ebenfalls glatte Schaufelbeschreibungen und damit NURBS-Darstellungen. Daher besteht die Notwendigkeit, ein diskret berechnetes Deformationsfeld der heißen parametrisierten CAD-Geometrie aufzuprägen und die NURBS-Beschreibung an die verschobenen Punkte anzupassen.

Am Anfang dieser Transformation stehen einzelne Bauteile, die im CAD-System als Solids beschrieben sind (Bild 1a). Diese werden zunächst in Teiloberflächen zerlegt, die als NURBS-Flächen $S(u, v)$ parametrisiert sind (Bild 1b). Um später Stetigkeit zwischen den einzelnen Teilflächen zu bewahren, muss daraus die Umrandung (Bild 1c) extrahiert und in einzelne NURBS-Kurven (Bild 1d) zerlegt werden.

Grundlage der parametrisierten Bauteiltransformation ist ein NURBS-Morphing. Dabei werden Art und Grad der jeweiligen Approximation übernommen und lediglich die Kontrollpunkte der NURBS verschoben, wobei die neue Lage der Kontrollpunkte durch Lösen eines linearen Ausgleichsproblems gefunden wird. Dies erfolgt zunächst für die NURBS-Randkurven (s. Abschnitt 3) und anschließend

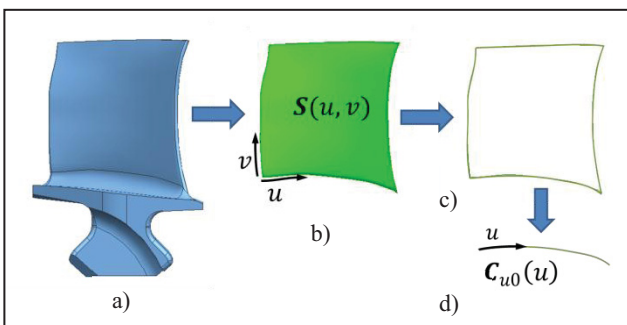


BILD 1. Zerlegung eines Solidmodells (a) in NURBS-Flächen (b) und Identifikation der Umrandungen (c) mit einer einzelnen NURBS-Kurve (d)

für das Innere der NURBS-Flächen unter Erhaltung der bereits bekannten Ränder (s. Abschnitt 4). Probleme können dabei an den Rändern von getrimmten Flächen oder bei zu geringer FE-Knotendichte entstehen. Dies wird durch das Einfügen zusätzlicher Verschiebungsknoten behoben, die durch Inter- oder Extrapolation gefunden werden (s. Abschnitt 5). Um zusätzlich tangentiale Glätte an den Übergängen mehrerer NURBS-Flächen zu erhalten, können abschließend einzelne Kontrollpunkte korrigiert werden (s. Abschnitt 6). Die Methode kann als Erweiterung in ein übliches CAD-System implementiert werden (s. Abschnitt 7).

2. STAND DER TECHNIK

Aus Sicht der computergestützten geometrischen Datenverarbeitung (engl. Computer Aided Geometric Design, CAGD) handelt es beim NURBS-Morphing um ein Flächenrekonstruktionsverfahren. Aus der Literatur sind eine Vielzahl von Verfahren zur Rekonstruktion glatter NURBS-Flächen bekannt. Die häufigsten Verfahren sind Approximationsverfahren auf Basis der kleinsten Fehlerquadrate (z.B. [2], [3]), die eine Referenzfläche für die Berechnung der Flächenparameter (u, v) der einzelnen Punkte benötigen. Das nichtlineare Problem wird hierbei iterativ über eine Sequenz linearer Approximationsschritte mit anschließender Parameterkorrektur [2] gelöst. Das größte Problem besteht bei diesen Verfahren in der Bestimmung der Referenzfläche, um eine Startnäherung für die Parameterwerte (u, v) zu erhalten.

Neben diesen Verfahren existieren auch andere iterative Methoden (z.B. [4], [5], [6], [7]), bei denen eine Parametrisierung der Punkte nicht notwendig ist. Diese Verfahren benötigen allerdings eine gute Startfläche bzw. Kurve mit einer problem-angepassten Kontrollpunktverteilung. Ein großer Nachteil dieser Methoden ist, dass die Startlösung großen Einfluss auf das Ergebnis haben kann (z.B. [7]).

Gegenüber den vorgestellten Flächenrekonstruktionsmethoden bietet die hier vorgestellte Heiß-Kalt-Transformation aufgrund des existierenden heißen CAD-Modells den großen Vorteil, dass die Parameterwerte der Fläche für die Oberflächenknoten des FE-Netzes exakt berechnet werden können. Eine Flächenapproximation für die Startlösung und eine Parameterkorrektur werden somit nicht benötigt. Außerdem sind Kontrollpunktanzahl und die Knotenvektoren durch das heiße CAD-Modell bereits bekannt. Eine aufwendige Knotenvektoroptimierung und Variation der Kontrollpunktanzahl, um den Approximationsfehler klein zu halten, ist daher ebenso nicht notwendig, da davon ausgegangen wird, dass das heiße CAD-Modell nur leicht deformiert wird. Im Gegensatz zu den Verfahren der Literatur wird das Ausgleichsproblem beim NURBS-Morphing für das Verschiebungsfeld gelöst.

3. MORPHING VON B-SPLINE-KURVEN

Zunächst soll der Transformationsprozess ausführlich an einer einzelnen B-Spline-Kurve erläutert werden, die ein Sonderfall einer NURBS-Kurve mit den Gewichten Eins darstellt [8]:

$$(1) \quad C(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot p_i .$$

Dabei ist $0 \leq u \leq 1$ ein Kurvenparameter der parametrisierten Kurve im Raum, d.h. $C(u) \in \mathbb{R}^3$, deren Definitionsbereich durch den Knotenvektor

$$(2) \quad U = \underbrace{[0 \dots 0]_{p+1}}_{p+1} U_{p+1} \dots U_n \underbrace{[1 \dots 1]_{p+1}}_{p+1}^T$$

in einzelne Abschnitte unterteilt wird. Auf diesen sind zunächst die Basisfunktionen nullten Grades

$$(3) \quad N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in [U_i, U_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, aus denen sich dann rekursiv die Basisfunktionen

$$(4) \quad N_i^p(u) = \frac{u-U_i}{U_{i+p}-U_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{U_{i+p+1}-u}{U_{i+p+1}-U_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u)$$

höheren Grades ergeben. Der tatsächliche Verlauf des B-Splines ergibt sich nach (1) aus der Superposition der Basisfunktionen vom Grad p mit den Kontrollpunkten $p_i \in \mathbb{R}^3$ als Gewichtungskoeffizienten. Durch Verschieben der Kontrollpunkte kann die Form der Kurve beliebig verändert werden, wobei der frei wählbare Grad der Basisfunktionen den Einflussbereich eines einzelnen Kontrollpunkts bestimmt.

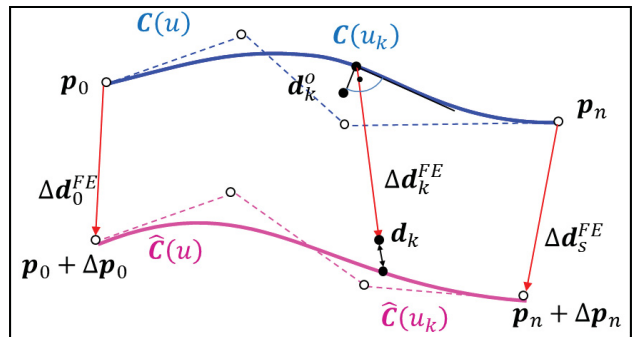


BILD 2. Transformation einer NURBS-Kurve durch Verschieben ihrer Kontrollpunkte

Für die FE-Berechnung werden i. Allg. diskrete FE-Knoten d_k^0 entlang dieser Kurve gewählt und zugehörige Verschiebungen Δd_k^{FE} berechnet. Dabei entsteht ein numerischer Fehler, so dass die FE-Knoten d_k^0 nicht exakt auf dem ursprünglichen B-Spline $C(u)$ liegen, Bild 2. Um die Genauigkeit des NURBS-Morphings zu verbessern, wird die verschobene NURBS-Kurve $\hat{C}(u)$ nicht aus den absoluten, verschobenen FE-Knotenpositionen $d_k^0 + \Delta d_k^{FE}$ ermittelt, sondern es werden zunächst Fußpunkte $C(u_k)$ gesucht, denen die FE-Verschiebungen Δd_k^{FE} aufgeprägt werden. Dazu werden Minimierungsprobleme

$$(5) \quad u_k = \arg \min_{u \in [0,1]} \|d_k^0 - C(u)\|^2, \quad k = 0, \dots, s,$$

gelöst, um die zugehörigen Kurvenparameterwerte $0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_k < u_{k+1} < \dots < u_{s-1} < u_s \leq 1$ zu ermitteln. Anschließend werden durch

$$(6) \quad d_k = C(u_k) + \Delta d_k^{FE}, \quad k = 0, \dots, s,$$

verschobene NURBS-Punkte gebildet, welche das transformierte Bauteil repräsentieren. Gesucht ist nun ein B-Spline gleichen Grades und mit gleichem Knotenvektor (2) wie die Ausgangskurve (1), jedoch mit verschobenen Kontrollpunkten, der die Punkte (6) am besten approximiert:

$$(7) \quad \hat{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot (p_i + \Delta p_i).$$

Die Kontrollpunktverschiebungen $\Delta \mathbf{p}_i$ lassen sich wie folgt von der Ausgangskurve (1) abspalten:

$$(8) \quad \widehat{\mathbf{C}}(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot \mathbf{p}_i + \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot \Delta \mathbf{p}_i \\ = \mathbf{C}(u) + \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot \Delta \mathbf{p}_i.$$

Die Forderung, dass dieser gemorphte B-Spline durch die verschobenen Kurvenpunkte (6) geht, führt auf ein Gleichungssystem

$$(9) \quad \widehat{\mathbf{C}}(u_k) = \mathbf{d}_k, \quad k = 0, \dots, s,$$

bzw. nach Einsetzen von (8) und (6) auf

$$(10) \quad \sum_{i=0}^n N_i^p(u_k) \cdot \Delta \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{d}_k^{FE}, \quad k = 0, \dots, s.$$

Damit bei einer Umrandung die Eckknoten später zusammen passen, werden die Verschiebungen von Anfangs- und Endkontrollpunkten des B-Splines exakt übernommen, d.h.

$$(11) \quad \Delta \mathbf{p}_0 = \Delta \mathbf{d}_0^{FE}, \quad \Delta \mathbf{p}_n = \Delta \mathbf{d}_s^{FE},$$

Bild 2. Damit bleiben in (10) $s - 1$ Gleichungen für $n - 1$ innere Kontrollpunktverschiebungen:

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{n-1} N_i^p(u_k) \Delta \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{d}_k^{FE} - N_0^p(u_k) \Delta \mathbf{p}_0 - N_n^p(u_k) \Delta \mathbf{p}_n, \\ k = 1, \dots, s - 1.$$

Für die einzelnen Koordinaten $\Delta \mathbf{p}_i = [\Delta p_i^x \quad \Delta p_i^y \quad \Delta p_i^z]^T$ entsteht daraus ein Gleichungssystem

$$(13) \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$(14) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} N_1^p(u_1) & N_2^p(u_1) & \dots & N_{n-1}^p(u_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^p(u_{s-1}) & N_2^p(u_{s-1}) & \dots & N_{n-1}^p(u_{s-1}) \end{bmatrix},$$

der rechten Seite

$$(15) \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] := \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_1^x & \Delta \tilde{\mathbf{d}}_1^y & \Delta \tilde{\mathbf{d}}_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta \tilde{\mathbf{d}}_{s-1}^x & \Delta \tilde{\mathbf{d}}_{s-1}^y & \Delta \tilde{\mathbf{d}}_{s-1}^z \end{bmatrix},$$

die zeilenweise aus den Koordinaten der Vektoren

$$(16) \quad \Delta \tilde{\mathbf{d}}_k = [\Delta \tilde{\mathbf{d}}_k^x \quad \Delta \tilde{\mathbf{d}}_k^y \quad \Delta \tilde{\mathbf{d}}_k^z]^T \\ := \Delta \mathbf{d}_k^{FE} - N_0^p(u_k) \cdot \Delta \mathbf{p}_0 - N_n^p(u_k) \cdot \Delta \mathbf{p}_n$$

gebildet wird, sowie der Matrix

$$(17) \quad \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] := \begin{bmatrix} \Delta p_1^x & \Delta p_1^y & \Delta p_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta p_{n-1}^x & \Delta p_{n-1}^y & \Delta p_{n-1}^z \end{bmatrix}$$

der unbekanntten Kontrollpunktverschiebungs koordinaten.

Die Berechnung kann entkoppelt für die einzelnen Spalten der Matrix erfolgen, d.h.

$$(18) \quad \mathbf{A} \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

welche jeweils die x , y und z -Koordinaten der unbekanntten Kontrollpunktverschiebungen zusammenfassen.

Üblicherweise ist die Zahl $s + 1$ der FE-Knoten größer als die Zahl $n + 1$ der Kontrollpunkte, d.h. $s > n$. Somit sind die drei Gleichungssysteme (18) jeweils überbestimmt und müssen daher als lineare Ausgleichsprobleme

$$(19) \quad \min \|\mathbf{A} \mathbf{x}_j - \mathbf{b}_j\|^2, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(s-1) \times (n-1)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

gelöst werden. Dies kann auf verschiedene Weise erfolgen [10]. Die meist-verwendete Methode löst die sogenannte Normalgleichung

$$(20) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_j = \mathbf{A}^T \mathbf{b}_j$$

durch eine geeignete Zerlegung (z.B. LU -Zerlegung, Cholesky-Zerlegung) der Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Die Vorgehensweise setzt allerdings voraus, dass die Matrix \mathbf{A} nicht singulär ist, d.h. $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n - 1$. Weitere Probleme treten auf, wenn die Matrix schlecht konditioniert ist. Das Produkt $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ist in diesem Fall noch schlechter konditioniert und führt zu starken Verfälschungen des Ergebnisses.

Alternativ kann das Ausgleichsproblem durch eine QR -Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{R}$ ermittelt werden, wobei \mathbf{Q} eine orthogonale Matrix und \mathbf{R} eine obere Dreiecksmatrix sind. Die Lösung wird dann durch Rückwärtseinsetzen als Lösung der Gleichung $\mathbf{R} \mathbf{x}_j = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_j$ gefunden. Das Verfahren hat im Vergleich zur oben genannten Methode eine bessere Stabilität, da das Quadrieren der Kondition in diesem Fall vermieden wird. Es setzt aber wieder den vollen Spaltenrang voraus.

Die Singularität bzw. die Kondition der Matrix \mathbf{A} sind von der Lage der eingegangenen FE-Knoten abhängig. Die exakte Singularität der Matrix \mathbf{A} kann durch Einfügen zusätzlicher Verschiebungsknoten behoben werden, siehe Kapitel 5. Bei einer Heiß-Kalt-Transformation kann allerdings eine „fast singuläre“ Matrix \mathbf{A} vorkommen, d.h. die Matrix hat zwar vollen Spaltenrang, aber schon eine kleine numerische Störung kann zur Rangsenkung führen. Daher empfiehlt sich allgemein für die Morphing-Methode das Verfahren der Singuläre-Werte-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$ mit den orthogonalen Matrizen $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{s-1}]$ und $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{n-1}]$ und einer rechteckigen Diagonalmatrix $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_i\}$. Die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{\Sigma}$ bilden dabei eine absteigende Folge von Singular-Werten: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n-1} \geq 0$.

Die Kondition der Matrix $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ lässt sich bei diesem Verfahren leicht ausrechnen als $k_2(\mathbf{A}) = \sigma_1 / \sigma_r$, wobei σ_r der erste von Null verschiedene Singular-Wert ist. Ersetzt man die kleinsten Singularwerte $\sigma_i < \varepsilon$ durch 0, ergibt sich eine neue Matrix

$$(21) \quad \tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{r'} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{r'}] \text{diag}\{\sigma_1 \dots \sigma_{r'}\} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{r'}^T \end{bmatrix} \\ = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{\Sigma}} \tilde{\mathbf{V}}^T$$

mit besserer Kondition, wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r'} \geq \varepsilon$. Die Lösung des approximativen Ausgleichsproblems $\min \|\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}_j - \mathbf{b}_j\|^2$ ergibt sich dann als $\mathbf{x}_j = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{b}_j$. Bei der Wahl der Toleranz-Größe ε trifft man dann einen Kompromiss zwischen dem Approximationsfehler und der Konditionsverbesserung.

Die nach dem Lösen der Ausgleichsprobleme entstandenen Residuen sind für die Fehlerabschätzung nicht geeignet, da diese lediglich komponentenweise Differenzvektoren $\mathbf{d}_k - \widehat{\mathbf{C}}(u_k)$ und nicht den wahren Abstand ausdrücken. Um den Transformationsfehler beurteilen zu können, kann man die Abstände der verschobenen Punkte (6) von der gemorphten B-Spline-Kurve $\widehat{\mathbf{C}}(u)$ wie folgt bestimmen:

$$(22) \Delta_k = \min_{u \in [0,1]} \|d_k - \widehat{C}(u)\|^2, \quad k = 1, \dots, s-1.$$

Daraus ergeben sich Mittelwert und maximaler Fehler als:

$$(23) \Delta_{mean} = \frac{1}{s-1} \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k, \quad \Delta_{max} = \max_k(\Delta_k).$$

Die Anwendung der Morphing-Methode auf Randkurven von Verdichterschaufeln zeigt Ergebnisse mit einer hohen Genauigkeit. Beispielsweise betragen der mittlere und der maximale Fehler am oberen Rand der Vorderseite einer Schaufel mit der Schaufellänge 50 mm $\Delta_{mean} = 6 \cdot 10^{-6}$ mm und $\Delta_{max} = 7 \cdot 10^{-5}$ mm.

4. MORPHING VON B-SPLINE-FLÄCHEN

Die Kernaufgabe der Heiß-Kalt-Transformation besteht in der Umrechnung von B-Spline-Flächen. Diese lassen sich in ähnlicher Weise wie B-Spline-Kurven morphen. Als zwei-parametrische Funktionen werden sie durch

$$(24) S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) \cdot p_{i,j}$$

mit $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq v \leq 1$ beschrieben, s. Abb. 1b. Die Kontrollpunkte $p_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ bilden ein bidirektionales Netz (s. Bild 3a) und die B-Spline-Basisfunktionen $N_i^p(u), N_j^q(v)$ werden mit (3) und (4) gebildet [8]. Dabei kann der Grad p und q in die beiden Netzrichtungen unterschiedlich sein, ebenso wie die beiden Knotenvektoren

$$(25) U = \left[\underbrace{0 \dots 0}_{p+1} \underbrace{U_{p+1} \dots U_n}_{p+1} \underbrace{1 \dots 1}_{p+1} \right]^T$$

und

$$(26) V = \left[\underbrace{0 \dots 0}_{q+1} \underbrace{V_{q+1} \dots V_m}_{q+1} \underbrace{1 \dots 1}_{q+1} \right]^T.$$

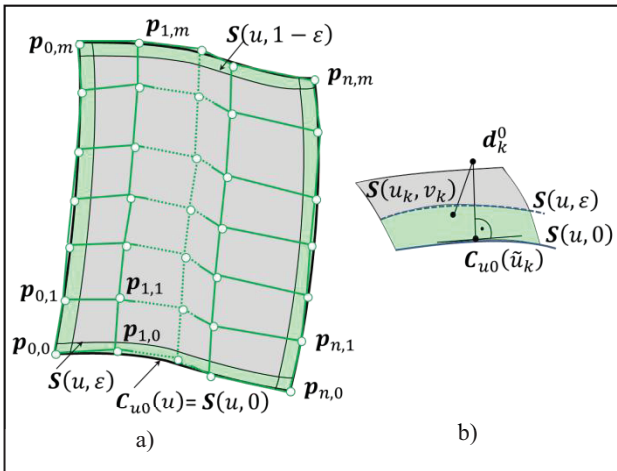


BILD 3. Identifikation (a) der unteren Randkurve C_{0v} einer NURBS-Fläche und (b) der zugehörigen FE-Knoten

Wie bereits bei den Kurven erwähnt, lassen sich im Finite-Elemente-Programm jeder Teiloberfläche FE-Knoten $d_k^0, k = 0, \dots, s$, zuordnen, von denen Verschiebungen Δd_k^{FE} aufgrund der Heiß-Kalt-Umrechnung bekannt sind. Damit besteht wiederum die Aufgabe, den verschobenen FE-Knoten eine gemorphte B-Spline-Fläche

$$(27) \widehat{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) \cdot (p_{i,j} + \Delta p_{i,j})$$

gleichen Grades mit verschobenen Kontrollpunkten zuzuordnen.

Auch hier gilt, dass aufgrund von Rundungsfehlern die FE-Knoten nicht exakt auf der B-Spline-Fläche (24) liegen, weshalb analog zum Morphing-Prozess für Kurven zunächst Fußpunkte $S(u_k, v_k)$ durch Projektion ermittelt werden. Diese haben zu den jeweiligen FE-Knoten d_k^0 den minimalen Abstand:

$$(28) (u_k, v_k) = \arg \min_{(u,v)} \|d_k^0 - S(u, v)\|^2, \quad k = 0, \dots, s.$$

Die Basispunkte der Heiß-Kalt-Transformation ergeben sich dann analog zu (6) durch Aufprägen der Verschiebungen Δd_k^{FE} auf diese Fußpunkte:

$$(29) d_k = S(u_k, v_k) + \Delta d_k^{FE}, \quad k = 0, \dots, s.$$

Die gesuchte Fläche (27) lässt sich analog zu (8) aufspalten in die Ausgangsfläche (24) und einen Term, der die Verschiebungen der Kontrollpunkte enthält:

$$(30) \widehat{S}(u, v) = S(u, v) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) \cdot \Delta p_{i,j}.$$

Aus der Forderung, dass die gemorphte B-Spline-Fläche durch die transformierten Punkte (29) geht, d.h.

$$(31) \widehat{S}(u_k, v_k) = d_k,$$

ergibt sich mit den Gleichungen (29) und (30) folgendes Gleichungssystem für die Kontrollpunktverschiebungen $\Delta p_{i,j}$:

$$(32) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u_k) \cdot N_j^q(v_k) \cdot \Delta p_{i,j} = \Delta d_k^{FE}, \quad k = 0, \dots, s.$$

Im Allgemeinen ist die Zahl der FE-Knoten auch hier größer als die Zahl der Kontrollpunkte, d.h.

$s + 1 > (n + 1)(m + 1)$, so dass sich analog zu (18) drei überbestimmte Gleichungssysteme für die x, y und z -Koordinaten der unbekanntenen Kontrollpunktverschiebungen ergeben, die mit den Strategien aus Abschnitt 3 zu lösen sind.

Würde man das Ausgleichsproblem (32) für jede Teiloberfläche eines Solids getrennt lösen, würden sich an den Rändern unterschiedliche Lösungen ergeben. Dies hätte zu Folge, dass ursprünglich identische Randkurven zweier aneinander grenzender Flächen nach dem Morphing unterschiedliche Randkurven zur Folge hätten. Dadurch würden beim Aneinanderfügen Lücken oder Überlappungen entstehen, die beim Erstellen des transformierten Solids zu numerischen Problemen führen würden. Um G0-Stetigkeit, d.h. ein Übereinstimmen der Randkurven, zu erzwingen, müssten Übergangs-Randkurven identifiziert und flächenübergreifend identisch transformiert werden. Dies ist i. Allg. aber nicht möglich, wenn die aneinander grenzenden Teilflächen und damit auch die Randkurven unterschiedlichen Grad bzw. unterschiedliche Kontrollpunkte haben.

Man kann jedoch die Unterschiede zumindest dadurch verringern, dass man innere und Randkontrollpunkte separat transformiert. Beispielsweise definiert $v = 0$ die untere Randkurve

$$(33) C_{u0}(u) := S(u, 0) \equiv \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot p_{i,0}$$

der B-Spline-Fläche (24) wegen $N_0^q(v=0) = 1$ und $N_j^q(v=0) = 0$ für $j \neq 0$ [8]. Um sie mit der in Abschnitt 3 beschriebenen Strategie transformieren zu können, muss man die zur Randkurve $C_{u0}(u)$ gehörigen FE-Knoten identifizieren. Dies geschieht durch Wahl einer Toleranz $\varepsilon > 0$, Abb. 3a. Alle in (28) berechneten Fußpunkte mit $v_k < \varepsilon$ bilden dann die Knotenmenge

$$(34) K_{u0} = \{k: v_k < \varepsilon\},$$

auf deren Basis die Transformation der Randkurve $C_{u0}(u)$ erfolgt. Analog zu Gleichung (5) werden zunächst die Fußpunkte $C_{u0}(\tilde{u}_k)$ der FE-Knoten d_k^0 , $k \in K_{u0}$, berechnet, Abb. 3b, und anschließend entsprechend Gleichungen (10) und (11) mit den entsprechenden FE-Verschiebungen die Kontrollpunktverschiebungen $\Delta p_{i,0}$ ermittelt.

Entsprechend bildet

$$(35) C_{u1}(u) := S(u, 1) \equiv \sum_{i=0}^n N_i^p(u) \cdot p_{i,m}$$

die obere Randkurve. Durch $v_k > 1 - \varepsilon$ werden die zugehörigen FE-Knotenindizes K_{u1} identifiziert, welche die Kontrollpunktverschiebungen $\Delta p_{i,m}$ bestimmen. Ebenso definieren $u = 0$ und $u = 1$ linke und rechte Randkurve

$$(36) C_{0v}(v) = S(0, v) = \sum_{j=0}^m N_j^q(v) \cdot p_{0,j},$$

$$(37) C_{1v}(v) = S(1, v) = \sum_{j=0}^m N_j^q(v) \cdot p_{n,j},$$

welche durch Transformation die Rand-Kontrollpunktverschiebungen $\Delta p_{0,j}$ und $\Delta p_{n,j}$ festlegen.

Bei diesem Vorgehen entstehen die Eckkontrollpunktverschiebungen $\Delta p_{0,0}$, $\Delta p_{0,m}$, $\Delta p_{n,0}$, $\Delta p_{n,m}$ doppelt. Liegt ein FE-Knoten sehr dicht in der Ecke, was i. Allg. der Fall ist, sind diese Paare allerdings identisch, ansonsten wird jeweils der Mittelwert gebildet.

Nachdem der Rand der NURBS-Fläche abgebildet ist, müssen nun die inneren Kontrollpunkte angepasst werden. Da die Randknoten des FE-Netzes bereits Eingang in die Transformation der Randkurven fanden, werden bei der Verschiebung der inneren Kontrollpunkte $p_{i,j}$, $i = 1 \dots n-1$, $j = 1 \dots m-1$, nur noch die restlichen FE-Knoten mit den Indizes

$$(38) K = \{0, 1, \dots, s\} \setminus \{K_{u0} \cup K_{u1} \cup K_{0v} \cup K_{1v}\}$$

berücksichtigt. Außerdem können die Rand-Kontrollpunktverschiebungen als nun bekannte Größen in Gleichung (32) auf die rechte Seite gebracht werden. Damit verbleiben $|K|$ Gleichungen für $(n-1) \cdot (m-1)$ unbekannte Kontrollpunktverschiebungen $\Delta p_{i,j}$:

$$(39) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} N_i^p(u_k) \cdot N_j^q(v_k) \cdot \Delta p_{i,j} = \Delta d_k^{FE} - \sum_{i=0}^n N_i^p(u_k) \cdot [N_0^q(v_k) \cdot \Delta p_{i,0} + N_m^q(v_k) \cdot \Delta p_{i,m}] - \sum_{j=1}^{m-1} N_j^q(v_k) \cdot [N_0^p(u_k) \cdot \Delta p_{0,j} + N_n^p(u_k) \cdot \Delta p_{n,j}],$$

$k \in K.$

Wie bereits oben angedeutet erfolgt die Bestimmung der Verschiebungen der inneren Kontrollpunkte durch Umschreiben dieser Gleichungen in ein lineares Ausgleichsproblem der Form (13) und Lösen mit Methoden aus Abschnitt 3.

Die Fehlerabschätzung kann analog Kapitel 3 durchgeführt werden. Beispielwerte für den mittleren und den maximalen Fehler, die nach der Heiß-Kalt-Transformation

der Vorderkante einer Verdichterschaufel mit der Länge 50 mm entstehen, liegen auch hier im akzeptablen Bereich: $\Delta_{mean} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$, $\Delta_{max} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$.

5. INTERPOLATION UND EXTRAPOLATION DES VERSCHIEBUNGSFELDES

Im CAD entstehen durch Verschneiden von Bauteilen mit Konstruktionsflächen häufig getrimmte Flächen. Beim Triebwerk geschieht dies beispielweise durch Verschneiden eines Schaufelblatts mit dem Gehäuse, Abb. 4. Die dabei abgeschnittenen Teile gehören dann nicht mehr zum Solidmodell und besitzen daher keine zugeordneten FE-Knoten. Daher existieren für diese Flächenteile auch keine für die Transformation erforderlichen FE-Verschiebungen. Wird die Schaufeloberkante wie in Abb. 5a zu sehen nicht verschoben, führt dies auf unrealistische Ergebnisse der transformierten NURBS-Flächen. Außerdem Singularitäten in der Koeffizientenmatrix A des linearen Ausgleichsproblems (39) entstehen.

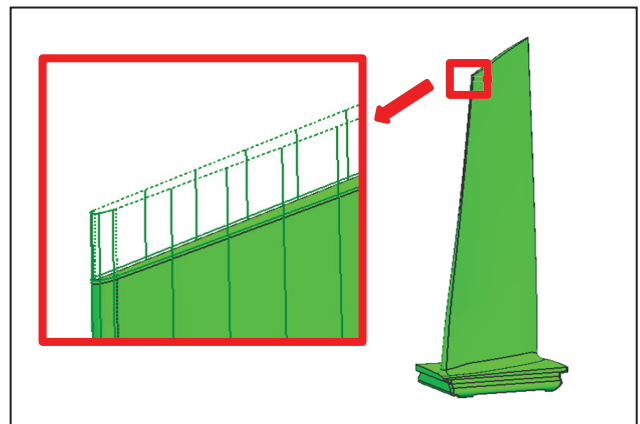


BILD 4. Entstehen getrimmter Flächen durch Verschneiden einer Verdichterschaufel mit dem Gehäuse

Solche Singularitäten können auch auftreten, wenn in einem Patch einer zu transformierenden NURBS-Fläche kein FE-Knoten liegt. Unter einem Patch versteht man eine Teilfläche von $S(u, v)$ mit $(u, v) \in [U_r, U_{r+1}] \times [V_s, V_{s+1}]$, $r \in \{p, \dots, n\}$, $s \in \{q, \dots, m\}$. Ohne die Verschiebungsinformation eines solchen fehlenden FE-Knotens liegt i. Allg. wegen der lokalen Flächenkontrolle auch nicht genügend Information über die Verformung dieses Patches vor. Beide Probleme lassen sich dadurch beheben, dass man künstliche FE-Knoten in den leeren Patches bzw. den getrimmten Flächen erzeugt. Deren Verschiebungen werden dann durch Inter- bzw. Extrapolation aus den Verschiebungen gegebener FE-Knoten ermittelt. Ein möglicher Ansatz dafür ist die Verwendung der aus der FE-Analyse bekannten baryzentrischen Koordinaten [9].

Bild 6 zeigt ein leeres Flächenstück $[U_r, U_{r+1}] \times [V_s, V_{s+1}]$, in dem durch

$$(40) \bar{u} = \frac{U_r + U_{r+1}}{2}, \quad \bar{v} = \frac{V_s + V_{s+1}}{2}$$

ein künstlicher FE-Knoten $\bar{S} = S(\bar{u}, \bar{v})$ erzeugt wird. Um diesem einen Verschiebungsvektor $\Delta d_{\bar{S}}^{FE}$ zuzuordnen, wie er im linearen Ausgleichsproblem (39) benötigt wird, kann dieser aus den Verschiebungen der nächstgelegenen FE-

Knoten bzw. deren zugeordneten Fußpunkten $S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3}$ in Nachbarpatches interpoliert werden.

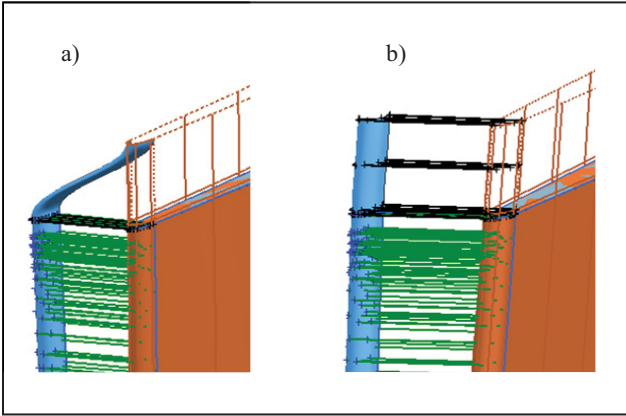


BILD 5. Heiß-Kalt-Transformation einer getrimmten Fläche durch (a) direkte Anwendung und b) Einfügen extrapolierte Verschiebungen

Für die Verwendung baryzentrischer Koordinaten benötigt man den Projektionspunkt \bar{S}' auf dem durch die drei Fußpunkte aufgespannten Dreieck $\Delta S_{k_1} S_{k_2} S_{k_3}$. Dazu wird mit Hilfe des Kreuzprodukts zweier Dreiecksseiten ein Normalenvektor

$$(41) \mathbf{n} = (\mathbf{s}_{k_3} - \mathbf{s}_{k_1}) \times (\mathbf{s}_{k_2} - \mathbf{s}_{k_1})$$

gebildet, auf den der Verbindungsvektor $\overrightarrow{S_{k_1} \bar{S}}$ projiziert wird. Durch Skalarprodukt mit dem normierten Normalenvektor findet man den gerichteten Abstand

$$(42) \mu = -(\bar{S} - S_{k_1})^T \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$$

des Punktes \bar{S} von der Dreiecksebene. Damit ergibt sich der Projektionspunkt \bar{S}' als

$$(43) \bar{S}' = \bar{S} + \mu \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \bar{S} - \frac{(\bar{S} - S_{k_1})^T \mathbf{n}}{n^T \mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

Bilden allgemein die Punkte $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit zugehörigen Funktionswerten $f(\mathbf{r}_i)$, so kann der Funktionswert für einen beliebigen Punkt $\mathbf{r} \in \Delta \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$ im Inneren des aufgespannten Dreiecks durch

$$(44) f(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^3 \lambda_i f(\mathbf{r}_i)$$

approximiert werden [9]. Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ die baryzentrischen Koordinaten, für die gilt

$$(45) \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{r}_i, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1.$$

Da beliebige drei Punkte im Raum \mathbb{R}^3 , die nicht auf einer Gerade liegen, immer eine Ebene definieren, kann die baryzentrische Interpolation auch auf innere Punkte eines Dreiecks im Raum erweitert werden. Durch eine geeignete Koordinatentransformation kann man von der Standardbasis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ zu einer neuen Basis $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$ wechseln [11], in der die Dreiecksebene parallel zu $x'y'$ -Ebene liegt. Für die neue Basis wählt man beispielweise die neuen Koordinatenvektoren

$$(46) \mathbf{e}'_x = \frac{S_{k_3} - S_{k_1}}{\|S_{k_3} - S_{k_1}\|}$$

$$(47) \mathbf{e}'_z = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

$$(48) \mathbf{e}'_y = \mathbf{e}'_x \times \mathbf{e}'_z.$$

Die Transformationsmatrix $(x', y', z') \rightarrow (x, y, z)$ ergibt sich dann aus Koordinaten der neuen Basisvektoren:

$$(49) \mathbf{B} = [\mathbf{e}'_x \quad \mathbf{e}'_y \quad \mathbf{e}'_z].$$

Die x', y' und z' Koordinaten der Punkte $S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3}$ und \bar{S}' bezüglich der neuen Basis berechnet man durch Multiplikation mit der inversen bzw. transponierten Transformationsmatrix:

$$(50) \begin{bmatrix} S_{k_i x'} \\ S_{k_i y'} \\ S_{k_i z'} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} S_{k_i x} \\ S_{k_i y} \\ S_{k_i z} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(51) \begin{bmatrix} S'_{x'} \\ S'_{y'} \\ S'_{z'} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} S'_x \\ S'_y \\ S'_z \end{bmatrix}.$$

Angewandt auf das Verschiebungsfeld ergibt sich der Verschiebungsvektor $\Delta \mathbf{d}_{\bar{S}}^{FE}$ entsprechend (44) aus den Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}_{k_1}^{FE}, \Delta \mathbf{d}_{k_2}^{FE}, \Delta \mathbf{d}_{k_3}^{FE}$ der Fußpunkte $S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3}$ nach

$$(52) \Delta \mathbf{d}_{\bar{S}}^{FE} \approx \lambda_1 \cdot \Delta \mathbf{d}_{k_1}^{FE} + \lambda_2 \cdot \Delta \mathbf{d}_{k_2}^{FE} + \lambda_3 \cdot \Delta \mathbf{d}_{k_3}^{FE}.$$

Die baryzentrischen Koordinaten $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ errechnen sich dabei aus

$$(53) \mathbf{T} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}'_{x'} - S_{k_1 x'} \\ \bar{S}'_{y'} - S_{k_1 y'} \end{bmatrix}$$

und

$$(54) \lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$$

mit

$$(55) \mathbf{T} = \begin{bmatrix} S_{k_2 x'} - S_{k_1 x'} & S_{k_3 x'} - S_{k_1 x'} \\ S_{k_2 y'} - S_{k_1 y'} & S_{k_3 y'} - S_{k_1 y'} \end{bmatrix}.$$

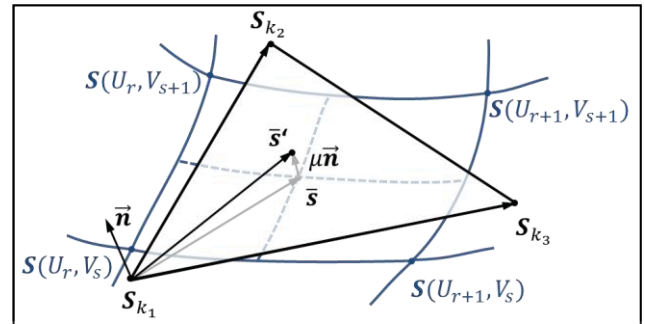


BILD 6. Erzeugen eines künstlichen FE-Knotens \bar{S} und Projektionspunkt \bar{S}' auf dem Dreieck $\Delta S_{k_1} S_{k_2} S_{k_3}$

Jeder zusätzliche Punkt \bar{S} mit den Parameterwerten (40) und der Verschiebungsinformation (52) liefert dann eine weitere Gleichung

$$(56) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} N_i^p(\bar{u}) \cdot N_j^q(\bar{v}) \cdot \Delta \mathbf{p}_{i,j} = \Delta \mathbf{d}_{\bar{S}}^{FE} - \sum_{i=0}^n N_i^p(\bar{u}) \cdot [N_0^q(\bar{v}) \cdot \Delta \mathbf{p}_{i,0} + N_m^q(\bar{v}) \cdot \Delta \mathbf{p}_{i,m}] - \sum_{j=1}^{m-1} N_j^q(\bar{v}) \cdot [N_0^p(\bar{u}) \cdot \Delta \mathbf{p}_{0,j} + N_n^p(\bar{u}) \cdot \Delta \mathbf{p}_{n,j}]$$

für das lineare Ausgleichsproblem (39), um eventuelle Singularitäten zu beheben.

Diese Vorgehensweise ist auch für die Extrapolation anwendbar, bei der die Punkte \bar{S} bzw. \bar{S}' außerhalb des Dreiecks liegen, das von gegebenen FE-Knoten aufgespannt wird. Dies wird z.B. bei getrimmten Flächen benö-

tigt. Bild 5b zeigt eine einwandfreie Heiß-Kalt-Transformation auch des getrimmten Teils der Schaufel, der z.B. für eine CFD-Rechnung neu mit der Gehäusekontur verschnitten werden kann.

6. STETIGKEITSKORREKTUR VON ÜBERGÄNGEN

Die Heiß-Kalt-Transformation soll nicht nur die kalten Punkte gut approximieren, sondern auch die wichtigsten Eigenschaften des warmen Modells bewahren. Beispielsweise kann wichtig sein, dass ursprünglich tangentialstetige Übergänge zwischen Flächen, wie etwa bei einer Verdichterschaukel der Übergang von der Vorderkante zur Saugseite, auch nach der Transformation wieder tangentialstetig sind.

Im Allgemeinen weisen zwei Flächen mit einem glatten Übergang nach der oben beschriebenen Transformation einen leichten Knick auf, der nachträglich korrigiert werden kann. Zur Erläuterung der Glättungsstrategie sei angenommen, dass die entsprechend Abschnitt 4 transformierten B-Spline-Flächen $\hat{S}(u, v)$ und $\hat{S}^*(u^*, v^*)$ in Bild 7 einen gemeinsamen Rand haben, der durch $v = v^* = 0$ gekennzeichnet ist. Betrachtet wird ein Punkt $Q = \hat{S}(u_q, 0) \equiv \hat{S}^*(u_q^*, 0)$ des gemeinsamen Randes. Die Tangentenvektoren und der normierte Normalenvektor für die Fläche

$$(57) \hat{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) \cdot \hat{p}_{i,j},$$

wobei $\hat{p}_{i,j} = p_{i,j} + \Delta p_{i,j}$ für die transformierten Kontrollpunkte in Gleichung (27) steht, ergeben sich dann aus

$$(58) \mathbf{t}_u := \frac{\partial \hat{S}}{\partial u}(u_q, 0),$$

$$(59) \mathbf{t}_v := \frac{\partial \hat{S}}{\partial v}(u_q, 0),$$

$$(60) \mathbf{n} := \frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|}.$$

Analog findet man für die angrenzende Fläche $\hat{S}^*(u^*, v^*)$

$$(61) \mathbf{t}_u^* := \frac{\partial \hat{S}^*}{\partial u^*}(u_q^*, 0),$$

$$(62) \mathbf{t}_v^* := \frac{\partial \hat{S}^*}{\partial v^*}(u_q^*, 0),$$

$$(63) \mathbf{n}^* := \frac{\mathbf{t}_v^* \times \mathbf{t}_u^*}{\|\mathbf{t}_v^* \times \mathbf{t}_u^*\|}.$$

Sind die Flächen im Punkt Q tangentialstetig, dann besitzen sie in diesem Punkt eine gemeinsame Tangentenfläche und die Normalenvektoren \mathbf{n} und \mathbf{n}^* bilden den Winkel Null. Die Größe des Winkels kann daher als Maß der G1-Stetigkeit im Punkt betrachtet werden.

Als gemeinsame Tangentenfläche kann man z.B. die Fläche mit dem gemittelten (nicht-normierten) Normalenvektor

$$(64) \mathbf{n}_T = \mathbf{n} + \mathbf{n}^*$$

festlegen. Der zugehörige Tangentenvektor \mathbf{t}_T ergibt sich dann analog zu Gleichung (43) über Projektion als

$$(65) \mathbf{t}_T = \mathbf{t}_v + \Delta \mathbf{t}_v$$

mit

$$(66) \Delta \mathbf{t}_v = -\frac{\mathbf{t}_v^* \mathbf{n}_T}{\mathbf{n}_T^* \mathbf{n}_T} \mathbf{n}_T.$$

Gesucht ist nun eine korrigierte, transformierte B-Spline Fläche

$$(67) \hat{S}_T(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) \cdot (\hat{p}_{i,j} + \Delta \hat{p}_{i,j})$$

mit erneut verschobenen Kontrollpunkten, welche die verbindende Randkurve invariant lässt und in jedem Punkt Q der Randkurve den Tangentenvektor (65) hat.

Mit Gleichung (57) erhält man zunächst

$$(68) \hat{S}_T(u, v) = \hat{S}(u, v) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) \cdot \Delta \hat{p}_{i,j}.$$

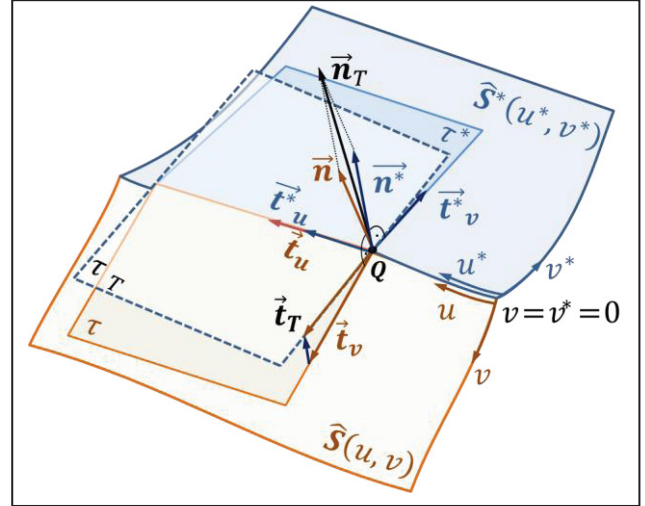


BILD 7. Glättung eines Knicks zwischen angrenzenden Flächen $\hat{S}(u, v)$ und $\hat{S}^*(u^*, v^*)$

Der Tangentenvektor dieser Fläche ergibt sich analog zu (59) als

$$(69) \frac{\partial \hat{S}_T(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial \hat{S}(u, v)}{\partial v} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) \frac{\partial N_j^q}{\partial v}(v) \cdot \Delta \hat{p}_{i,j}$$

bzw. im Punkt Q als

$$(70) \frac{\partial \hat{S}_T}{\partial v}(u_q, 0) = \frac{\partial \hat{S}}{\partial v}(u_q, 0) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u_q) \frac{\partial N_j^q}{\partial v}(0) \Delta \hat{p}_{i,j}.$$

Nach Voraussetzung soll dieser Tangentenvektor dem in Gleichung (65) definierten entsprechen, d.h.

$$(71) \frac{\partial \hat{S}_T}{\partial v}(u_q, 0) = \mathbf{t}_T.$$

Durch Einsetzen von Beziehung (70) und Definitionen (59) und (65) ergibt sich die Gleichung

$$(72) \sum_{i=0}^n N_i^p(u_q) \sum_{j=0}^m \frac{\partial N_j^q}{\partial v}(0) \cdot \Delta \hat{p}_{i,j} = \Delta \mathbf{t}_v$$

für die zusätzlichen Kontrollpunktverschiebungen $\Delta \hat{p}_{i,j}$. Nach [8] kann noch folgende Vereinfachung durchgeführt werden:

$$(73) \sum_{j=0}^m \frac{\partial N_j^q}{\partial v}(0) \cdot \Delta \hat{p}_{i,j} = \frac{q}{V_{q+1}} (\Delta \hat{p}_{i,1} - \Delta \hat{p}_{i,0}),$$

wobei V_{q+1} der erste von Null verschiedene Wert im Knotenvektor (26) ist. Ein Vergleich mit (72) zeigt, dass zur Erreichung von Tangentialstetigkeit nicht alle Kontrollpunkte $\hat{p}_{i,j}$ verschoben werden müssen, sondern aufgrund der lokalen Flächenkontrolle nur zwei Reihen von Kontrollpunkten $\hat{p}_{i,0}$ und $\hat{p}_{i,1}$ betroffen sind. Damit reduziert sich Gleichung (72) auf die Forderung

$$(74) \sum_{i=0}^n N_i^p(u_q) \cdot \frac{q}{V_{q+1}} (\Delta \hat{p}_{i,1} - \Delta \hat{p}_{i,0}) = \Delta \mathbf{t}_v.$$

Da neben der geforderten Tangentenstetigkeit die gemeinsame Randkurve erhalten bleiben soll, dürfen die Kontrollpunkte dieses Randes nicht verändert werden, d.h. es gilt

$$(75) \Delta \hat{\mathbf{p}}_{i,0} = \mathbf{0}.$$

Eingesetzt in (74) erhält man endgültig folgende Gleichung für die Verschiebungen $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{i,1}$ der Kontrollpunkte in der zweiten Reihe neben der Randkurve:

$$(76) \sum_{i=0}^n N_i^p(u_q) \cdot \Delta \hat{\mathbf{p}}_{i,1} = \frac{v_{q+1}}{q} \Delta \mathbf{t}_v.$$

Obwohl diese Beziehung zunächst nur an einem einzelnen Punkt \mathbf{Q} der gemeinsamen Randkurve entwickelt wurde, gilt sie natürlich im Prinzip für alle Punkte der Randkurve und liefert damit unendlich viele Gleichungen. Dies ist für die Berechnung der $n+1$ Kontrollpunktverschiebungen $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{i,1}, i = 0 \dots n$, nicht nötig. Ein guter Erfahrungswert ist die Verwendung von doppelt so vielen Gleichungen wie Unbekannten, wobei u_q äquidistant im Intervall $[0, 1]$ verteilt werden kann.

7. ANWENDUNG DES NURBS-MORPHINGS AUF EINE VERDICHTERSCHAUFEL

Die vorgestellte NURBS-Morphing-Methode wurde als Erweiterung (Plugin) des CAD-Systems Unigraphics NX 6.0 in der Programmiersprache C++ entwickelt. Für die Implementierung wurde die Unigraphics Programmierschnittstelle NXOpen C++ verwendet, die den Zugriff auf die gesamte Funktionalität des CAD-Systems ermöglicht. Zur Umsetzung der vorgestellten Methode mussten außerdem eigene numerische Routinen entwickelt und implementiert werden.

Beim Start des Plugins werden zunächst der Inhalt des aktuellen CAD-Parts analysiert und die enthaltenden Solids in NURBS-Flächen zerlegt. Anschließend werden die FE-Knoten mit den zugehörigen Verschiebungen getrennt für jede zu transformierende Teiloberfläche als Datei geladen. In realen CAD-Modellen von Triebwerkskomponenten werden teilweise nicht alle Flächen bzw. Teilkörper eines Modells einer Heiß-Kalt-Transformation unterzogen. Beispielsweise ist bei einer Verdichterschaufel nur die Verformung des Schaufelblatts notwendig, da die Deformation des Schaufelfußes aufgrund von kleinen Verschiebungen vernachlässigt werden kann, siehe Bild 8. Um das Morphing der betroffenen NURBS-Flächen entsprechend Kapitel 3, 4 und 5 durchzuführen, wird zunächst die Information über deren NURBS-Beschreibung mit Hilfe von NXOpen-Funktionen gesammelt. Nach dem abgeschlossenen Morphing-Prozess folgt die Untersuchung der Stetigkeit an den Flächenübergängen des heißen Modells. Die Art der Stetigkeit (tangentialer Übergang oder Knick) wird automatisch analysiert, quantifiziert und im Falle eines tangentialen Übergangs entsprechend Kapitel 6 zwischen den gemorphten Flächen wieder hergestellt. Zum Schluss werden als Maß für die Genauigkeit der NURBS-Flächenrekonstruktion die Abstandsfehler zwischen den FE-Oberflächenknoten und der NURBS-Fläche bestimmt und mit einem zulässigen maximalen und mittleren Fehler verglichen (vgl. Kap. 4). Nach dem automatischen Prozess übernimmt ein Ingenieur die visuelle Endkontrolle des kalten CAD-Modells.

Obwohl die Morphing-Methode an B-Spline-Geometrien erläutert wurde, bleibt die Vorgehensweise auch für NURBS-Geometrien mit wenigen Ausnahmen gleich. Im Gegensatz zu B-Spline-Kurven besitzen NURBS-Kurven nicht negative Gewichte ω_i der Kontrollpunkte \mathbf{p}_i und werden in Erweiterung von (1) definiert als

$$(77) \mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i N_i^p(u)}{\sum_{j=0}^n \omega_j N_j^p(u)} \cdot \mathbf{p}_i.$$

Mit der Abkürzung

$$(78) R_i^p(u) = \frac{\omega_i N_i^p(u)}{\sum_{j=0}^n \omega_j N_j^p(u)}.$$

lässt sich (77) umformen zu

$$(79) \mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_i^p(u) \cdot \mathbf{p}_i.$$

Ersetzt man daher in den Gleichungen (12) $N_i^p(u_k)$ durch $R_i^p(u_k)$, so ergeben sich Ausgleichsprobleme für die Bestimmung der unbekanntenen Kontrollpunktverschiebungen $\Delta \mathbf{p}_i$ einer NURBS-Kurve. Eine analoge Vorgehensweise gilt für NURBS-Flächen:

$$(80) \mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{N_i^p(u) \cdot N_j^q(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_k^p(u) \cdot N_l^q(v) w_{k,l}} \cdot \mathbf{p}_{i,j}.$$

Bei der Korrektur der tangentialen Übergänge zwischen NURBS-Flächen muss allerdings die Änderung der partiellen Ableitungen beachtet werden, die wegen des Nenners komplizierter sind.

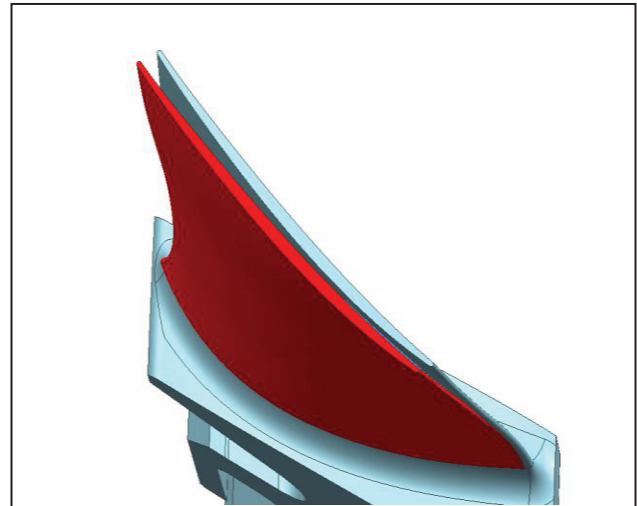


BILD 8. CAD-Modell einer Verdichterschaufel (blau) und gemorphtes Schaufelblatt (rot).

8. ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Artikel beschreibt eine neue Methode der Heiß-Kalt-Transformation für beliebige Triebwerksbauteile auf Basis eines heißen CAD-Modells (Solid), eines FE-Netzes mit Verschiebungsfeld und eines NURBS-Morphing-Algorithmus. Das nicht iterative Verfahren vermeidet das Hauptproblem der NURBS-Flächenrekonstruktion, die notwendige Flächenparametrisierung der diskreten Oberflächenpunkte. Im Gegensatz zu den Standard-Flächenrekonstruktionsverfahren wird bei dem hier vorgestellten NURBS-Morphing das Ausgleichsproblem für das Verschiebungsfeld eines FE-Netzes gelöst. Besonderer Wert wird hierbei auf die numerische

Robustheit des Gesamtverfahrens und Einbehaltung der G0 und G1 Stetigkeiten der Flächenübergänge gelegt. Beim Gesamtverfahren handelt es sich um einen automatischen Prozess innerhalb eines CAD-Systems, der ein FE-Verschiebungsfeld auf ein beliebiges CAD-Solid aufprägt.

DANKSAGUNG

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojektes VIT 3 (Virtuelles Triebwerk) an der BTU Cottbus in Kooperation mit Rolls-Royce Deutschland und wurde zum Teil vom Land Brandenburg (Förderkennzeichen 80142272) finanziert. Wir danken dem Fördergeber und Rolls-Royce Deutschland für die Unterstützung und für die Erlaubnis zur Veröffentlichung.

LITERATUR

- [1] A. K. Dutta, An Automated Multi-Objective Optimization Approach for Aerodynamic 3D Compressor Blade Design, PhD Thesis BTU Cottbus, Shaker, Aachen, 2011
- [2] J. Hoschek, D. Lasser, Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, 2. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992
- [3] J. Hoschek, U. Dietz, Smooth B-spline surface approximation to scattered data. In: Reverse engineering. Hrsg.: J. Hoschek, W. Dankwort, Teubner, Stuttgart, 1996, S. 129-140.
- [4] H. Pottmann, M. Hofer, Geometry of the Squared Distance Function to Curves and Surfaces, Technical Report No. 90, Institut für Geometrie, TU Wien, 2002
- [5] H. Pottmann, S. Leopoldseder, A concept for parametric surface fitting which avoids the parametrization problem, Computer Aided Geometric Design 20 (2003) 343-362.
- [6] H. Pottmann, S. Leopoldseder, M. Hofer, Approximation with Active B-Spline Curves and Surfaces. In: Proceedings of the Pacific Graphics, Beijing, 2002.
- [7] H. Yang, W. Wang, J. Sun, Control point adjustment for B-spline curve approximation, Computer-Aided Design 36 (2004) 639–652.
- [8] L. Piegl, W. Tiller, The NURBS-Book, Springer, Berlin, 1997
- [9] C. J. Bradley, The Algebra of Geometry: Cartesian, Areal and Projective Co-Ordinates, Highperception, Bath, 2007
- [10] W. Dahmen, A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, Berlin, 2008
- [11] J. Liesen, V. Mehrmann, Lineare Algebra, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011